מבוא לאנליזה 1 – השלמה לתרגול 1

תזכורת: עבור $A\subseteq \mathbb{R}$,

- $M\in\mathbb{R}$ הוא **חסם מלעיל** של A אם $\forall_{a\in A}\ a\le M$.
- $m\in\mathbb{R}$ הוא **חסם מלרע** של A אם $\forall_{a\in A}\ m\le a$.
- $S\in\mathbb{R}$ הוא ה**סופרימום** של A אם S חסם מלעיל של A, ולכל חסם מלעיל M של A מתקיים $S\le M$. אם $S\in A$ הוא נקרא גם **מקסימום.**
- $I\in\mathbb{R}$ הוא ה**אינפימום** של A אם I חסם מלרע של A, ולכל חסם מלרע m של A מתקיים $m\le I$. אם $I\in A$ הוא נקרא גם **מינימום.**

נתנו בתרגול הגדרה נוספת:

- $M\in\mathbb{R}$ הוא המקסימום של $A\subseteq\mathbb{R} \iff M\in A$ וגם $\forall_{a\in A}\ a\le M$
- $m\in\mathbb{R}$ הוא המינימום של $A\subseteq\mathbb{R} \iff m\in A$ וגם $\forall_{a\in A}\ m\le a$

נוכיח שההגדרות הללו שקולות (נראה עבור המקסימום, בדומה ניתן להראות גם עבור המינימום):

$(\Leftarrow)$: נניח ש־$M\in\mathbb{R}$ הוא המקסימום של $A\subseteq\mathbb{R}$ לפי ההגדרה הראשונה (כלומר $M=supA$ ו־$M\in A$). אז $\boldsymbol{M\in A}$, וכיוון שהוא הסופרימום הוא בפרט חסם מלעיל של A, כלומר $\boldsymbol{\forall_{a\in A}\ a\le M}$, ולכן הוא עונה גם על ההגדרה השנייה של מקסימום.

$(\Rightarrow)$: נניח ש־$M\in\mathbb{R}$ הוא המקסימום של $A\subseteq\mathbb{R}$ לפי ההגדרה השנייה (כלומר $M\in A$ וגם $\forall_{a\in A}\ a\le M$). אז $\boldsymbol{M\in A}$ והוא חסם מלעיל של A. נותר להראות שהוא הסופרימום של A (ואז הוא עונה גם על ההגדרה הראשונה של מקסימום). לשם כך צ"ל שאם $x\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A אז $M\le x$, אבל זה ודאי נכון, שהרי אם x חסם מלעיל של A אז **לכל** $a\in A$ מתקיים $a\le x$, ובפרט עבור $a=M\in A$ מתקיים $M\le x$.