תרגיל 9

שאלה 1

מצאו את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים ובדקו התכנסות בקצוות $x=\pm R$

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ $(p\in\mathbb{R})$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n x^n$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

פתרון

א. מנוסחת קושי-הדמר נקבל $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}}=1$. נציב $x=-1$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ שמתכנס אם ורק אם $p>0$. אמנם, אם $p>0$ נקבל שטור זה הינו טור לייבניץ. אם $p\le 0$ לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טור כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\ne 0$ והטור מתבדר. נציב $x=1$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ שמתכנס אם ורק אם $p>1$.

ב. ניעזר הפעם בנוסחת דלמבר ונקבל $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)3^{n+2}}{(n+1)3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+6}{n+1}=3$

נציב $x=3$ ונקבל את הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+3}$ (ניתן לראות זאת למשל ע"י הפעלת מבחן השוואה עם הטור ההרמוני המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$).

נציב $x=-3$ ונקבל את טור לייבניץ המתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(n+1)3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+3}$. לכן, תחום ההתכנסות הוא $[-3,3)$.

ג. אם $\alpha=0$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot x^n$ שמתכנס לכל x כלומר במצב זה רדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$. נניח כעת ש $\alpha\neq 0$ ונקבל $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\alpha^n\right|}{\left|\alpha^{n+1}\right|}=\frac{1}{|\alpha|}$.

נציב $x=\frac{1}{|\alpha|}$ ונקבל את הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^n$. טור זה מתבדר שכן האיבר הכללי של הטור לא מתכנס לאפס (למעשה שווה לאחד בערך מוחלט).

מסיבה דומה גם הטור שמתקבל בהצבת $x=-\frac{1}{|\alpha|}$ הוא טור מתבדר.

לסיכום: אם $\alpha=0$ אז $R=\infty$. אם $\alpha\neq 0$ תחום ההתכנסות הוא $\left(-\frac{1}{|\alpha|},\frac{1}{|\alpha|}\right)$.

שאלה 2

חשבו את סכום הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ כאשר $|x|<1$. רמז: $nx^n=(n+1)x^n-x^n$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ כאשר $x>1$.

פתרון

א. נציג שתי דרכים לפתרון. דרך ראשונה- לפי הרמז $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

כעת, לפי נוסחה של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת (שימו לב $|x|<1$) נקבל ש $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$. נשים לב ש $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'$ ונרצה להפעיל את המשפט של גזירה איבר-איבר. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$ מתכנס כטור גיאומטרי כאשר $|x|<1$

ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$ ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

ובסה"כ $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{2x-x^2-x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

דרך שניה (עם פחות פירוט):

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

ב. נציב $t = \frac{1}{x}$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ כאשר $0<t<1$. מסעיף א נקבל ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}nt^n = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

בשאלות הבאות אפשר להיעזר בטורי מקלורן ידועים במידת הצורך.

<u>שאלה 3</u>

פתחו לטור מקלורן את הפונקציות הבאות וחשבו את $f^{(8)}(0), f^{(9)}(0)$.

א. $f(x) = \sin^2 x$.

ב. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

<u>פתרון</u>

א. נציג שתי דרכים למציאת הטור המבוקש. דרך ראשונה-

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1-2\sin^2(x)$. לכן, $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$.

כעת, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ולכן

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

דרך שניה-

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin(2x)$. כעת, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ולכן, $\sin(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

מכיון ש $f(0)=0$, נקבל ממשפט אינטגרציה איבר איבר שלכל $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n2^{2n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

כדי לחשב את $f^{(8)}(0)$ נמצא תחילה את המקדם של x^8 שמתקבל מהצבה $n=3$ (כי אז $2n+2=8$). המקדם הוא $\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. מצד שני המקדם אמור להיות $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$. מיחידות הפיתוח לטור חזקות נקבל ש $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. לכן, $f^{(8)}(0)=-2^7$. קל לראות ש $f^{(9)}(0)=0$ (למה?).

ב. נשים לב ש $\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. כמו כן כאשר $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. לכן ממשפט גזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$. כדי "להגיע" ל$x^8$ צריך להציב

$n=9$ נקבל שהמקדם של x^8 הוא 9 מצד אחד ו $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$ מצד שני. לכן,

$9=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$. כלומר, $f^{(8)}(0)=9!$ ובאופן דומה מראים ש $f^{(9)}(0)=10!$.

<u>שאלה 4</u>

חשבו את $\cos(1)$ עם שגיאה קטנה מ 10^{-5}.

שימו לב: הזווית היא ברדיאנים ולא במעלות.

<u>פתרון</u>

$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (ניתן להגיע מהטור של סינוס ע"י גזירה איבר איבר או ישירות דרך חישוב הנגזרות וזיהוי החוקיות). בגלל שהנגזרות האי זוגיות מתאפסות נובע $\cos(1)=P_{2n+1}(1)+R_{2n+1}(1)$ כאשר פולינום טיילור המתאים הוא

$$P_{2n+1}(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

ושארית לגרנז' מהצורה $R_{2n+1}(1)=\frac{\cos^{2n+2}(c)\cdot 1^{2n+2}}{(2n+2)!}=\frac{\cos^{2n+2}(c)}{(2n+2)!}$ כאשר c נקודה בין אפס לאחת. מכיון שכל הגזרות של קוסינוס בערך מוחלט הן רוסינוס או סינוס נקבל שמתקיים $\left|R_{2n+1}(1)\right|=\left|\frac{\cos^{2n+2}(c)}{(2n+2)!}\right|\le\frac{1}{(2n+2)!}$. אנחנו מעוניינים ש $\frac{1}{(2n+2)!}<10^{-5}$ וזה שקול לכך ש $(2n+2)!>10^5$. אי שוויון זה מתקיים לראשונה כאשר $n=4$. לכן $P_{2\cdot4+1}(1)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}$ כלומר $\cos(1)\approx 0.540302$ (עם שגיאה שקטנה מ 10^{-5}).

שאלה 5

תהי $f(x)=\ln(1+x)$.

א. הראו שלכל $-1<c$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^{(n)}(c)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+c)^n}$.

ב. חשבו את $\ln(1.5)$ עם שגיאה קטנה מ0.01.

פתרון

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$. $f^{(1)}(c)=\frac{1}{1+c}=\frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(1+c)^1}$. נניח

נכונות לn (כלומר שעבור n לכל $-1<c$ מתקיים $f^{(n)}(c)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+c)^n}$) ונוכיח

ל$n+1$. מהנחת האינדוקציה $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ לכל $-1<x$. עם נגזור את

הפונקציה פעם נוספת נקבל ש

$$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)'=(-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right)'=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(-n)}{(1+x)^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}}$$

ואם נציב $-1<c$ נקבל ש $f^{(n+1)}(c)=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+c)^{n+1}}$ כדרוש.

ב. לכל $|x|<1$ (למעשה לכל איקס בקטע $(-1,1]$) מתקיים $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

אם נציב $x=\frac{1}{2}$ וניעזר בטור מקלורן זה נקבל ש

$\ln(1.5)=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{\ln^{(n+1)}(1+c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ כאשר c בין אפס לחצי.

נרצה ש $\left|\frac{\ln^{(n+1)}(1+c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|<0.01$. לפי סעיף א ומכיון ש $0<c$

$\left|\frac{\ln^{(n+1)}(1+c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+c)^{n+1}}\right|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(n+1)!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(1+c)^{n+1}(n+1)}<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(n+1)}$. לכן מספיק

למצוא את האינדקס הטבעי הראשון המקיים $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(n+1)} < 0.01$. אי שוויון זה מתקיים החל מ $n=5$. לכן, $\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{391}{960}$ יספק את הקירוב המבוקש.

נקבל ש $\ln(1.5) \approx 0.407$ עם שגיאה קטנה מ 0.01.

הערה (בעקבות תובנה של סטודנט)- מכיון ש $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ ומדובר **בטור לייבניץ** אז ניתן לפתור גם בלא שימוש בשארית לגרנז'. איך? בטור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ תמיד מתקיים $\left|S-S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| < a_{n+1}$ (וגם ידוע ש $a_1 > S_1$).

כעת, אם $\frac{0.5^{n+1}}{n+1} = a_{n+1} < 0.01$ אז יתקיים גם $\left|R_n\right| = \left|S-S_n\right| < 0.01$ וזה קורה אפילו החל מ $n=4$. גם בשאלה 4 מדובר בטור לייבניץ ואפשר היה לפתור אותה בדרך זו.