אלגברה לינארית 1 - תרגול 3

12 ביולי 2020

1 אלגברת מטריצות

1.1 הגדרה ראשונית לכפל מטריצות

כזכור הגדרנו כפל מטריצות באופן הבא: הכפל AB מוגדר כאשר מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B (כלומר, נניח $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$, ואז $AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$), ואז מתקיים:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

לדוגמא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-2)\cdot(-1) = 6 \right)$$

תכונות של חיבור, כפל בסקלאר וכפל מטריצות:

1. קיבוץ: כאשר הכפל מוגדר מתקיים: $(AB)C = A(BC)$.
2. פילוג: כאשר הפעולות מוגדרות מתקיים: $A(B+C) = AB + AC$.
3. הוצאת סקלאר: כאשר הכפל מוגדר: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
4. חילוף בחיבור: כאשר החיבור מוגדר: $A + B = B + A$.
5. **שימו לב!** לא מובטח חילוף בכפל. נדגיש שלפעמים הכפל בכלל לא מוגדר באחד הכיוונים. למשל, אם $A \in \mathbb{F}^{2\times 3}, B \in \mathbb{F}^{3\times 5}$ אז הכפל AB מוגדר, אך הכפל BA

כלל לא מוגדר. אך גם כאשר הכפל מוגדר בשני הכייוונים, אין זה אומר שיש שיוויון.
למשל, לעיל חישבנו את האיבר $(AB)_{2,1}$ נחשב כעת בכיוון השני:

$$(BA)_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 6$$

תרגילים:

1. נתונה מערכת של m משוואות ב־n נעלמים $Ax = b$. נסמן ב־ $L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$ את אוסף פתרונות המערכת, ונסמן ב־ $H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$ את אוסף פתרונות המערכת ההומוגנית המתאימה.

(א) נניח ש־L איננה ריקה, כלומר יש פתרון למערכת, נסמנו $v_1 \in L$. הוכיחו:

$$L = \{v_1 + v : v \in H\} = v_1 + H$$

כלומר, אוסף פתרונות המערכת מתקבל מפתרון פרטי + אוסף הפתרונות להומוגנית.

פתרון: כפי שנלמד בבדידה, כדי להוכיח שיוויון בין קבוצות ניתן להראות "הכלה דו־כיוונית". בהינתן איבר $w \in L$ נראה שהוא מקיים $w \in v_1 + H$ כלומר, שקיים $v \in H$ כך ש־ $w = v_1 + v$. ובנוסף נראה שבהינתן $v_1 + v \in v_1 + H$ מתקיים ש־ $v_1 + v \in L$.

כיוון ראשון: יהי $w \in L$. נשים לב שאנחנו יודעים ש־ $Av_1 = b, Aw = b$. מכאן נראה שאולי כדאי לבחור את $v = w - v_1$. כמובן מתקיים $w = v_1 + w - v_1 = v_1 + v$, ובנוסף צ"ל ש־ $v \in H$, ואכן:

$$Av = A(w - v_1) = Aw - Av_1 = b - b = 0$$

כיוון שני: יהי $w \in v_1 + H$, צ"ל: $w \in L$, כלומר, שהוא פתרון למערכת. ואכן העובדה ש־ $w \in v_1 + H$ פירושו: קיים $v \in H$ כך ש־ $w = v_1 + v$, ולכן:

$$Aw = A(v_1 + v) = Av_1 + Av = b + 0 = b$$

(ב) מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת $Ax = b$ אך יש פתרון יחיד למערכת ההוומגונית המתאימה.

פתרון: נבחר $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. יש שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת. למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד כיון שאין משתנים חופשיים.

(ג) מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת $Ax=b$ אך יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית המתאימה.

פתרון: נבחר $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$. יש שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת. יש משתנה חופשי, ולכן למערכת ההומוגנית יש אינסוף פתרונות.

(ד) נתון שמספר המשוואות זהה למספר הנעלמים. עוד נתון, שאין פתרונות למערכת $Ax=b$. מה ניתן לומר על הפתרונות למערכת ההומוגנית?

פתרון: במערכת יש שורת סתירה, כלומר, **בצורה המדורגת** של A ישנה שורת אפסים (שימו לב - אף אחד לא מבטיח שורת אפסים ב-A), מהשיוויון בין מס' המשוואות למס' הנעלמים, כיון שבשורה האחרונה אין איבר מוביל נקבל שיש לכל היותר $n-1$ איברים מובילים, ולכן היותר $n-1$ משתנים תלויים, ומכאן שיש לפחות משתנה חופשי אחד. מסקנה: יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית.

1.2 כפל שורה וכפל עמודה

נלמד על עוד "שיטות" לחישוב כפל מטריצות. נתחיל בדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot4+2\cdot7 & 1\cdot2-1\cdot5+2\cdot8 & 1\cdot3-1\cdot6+2\cdot9\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\end{pmatrix.$$

באופן כללי, נרצה לחשב את הכפל AB. נסמן $B=\begin{pmatrix}R_1(B)\\R_2(B)\\\vdots\\R_n(B)\end{pmatrix}$, אז מתקיים:

$$R_i(AB)=R_i(A)\cdot B=\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\cdot R_j(B)$$

לדוג':

$$R_3\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&-2\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{B}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\Big($$

בדומה, יש כפל עמודה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 3+(-3)\cdot 4 \\ 0\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 4 \\ -1\cdot 2+3+4 \end{pmatrix} = 2\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ובאופן כללי, אם $A = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{pmatrix}$ אז:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} \cdot C_j(A)$$

תרגילים:

1. תהא $Ax = b$ מערכת משוואות. נניח ש־ v פתרון למצערכת, w פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה. נגדיר $B = \begin{pmatrix} v & w & v+w & v-w & w-v \end{pmatrix}$. חשבו את AB/

פתרון: נפתור לפי שיטת "כפל עמודה". כיון שמתקיים $Av = b, Aw = 0$, לפי כפל עמודה נקבל:

$$AB = \begin{pmatrix} Av & Aw & A(v+w) & A(v-w) & A(w-v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & b & b & -b \end{pmatrix}$$

נניח $b \in \mathbb{F}^{t\times 1}$, מספר השורות ב־$A$ חייב להיות גם t. מספר העמודות לכאורה חופשי. נסמנו a. מכאן מתחייב שש־ $x \in \mathbb{F}^{a\times 1}$. B היא מטרייצה שכל עמודה שלה זה וקטור פתרון למערכת (או להומוגנית), ולכן הוא מסדר כמו של x. לכן $B \in \mathbb{F}^{a\times 5}$. ולכן $AB \in \mathbb{F}^{t\times 5}$.

1.3 שחלוף וסימטריות

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז המטריצה המשוחלפת שלה היא המטריצה A^t המקיימת:

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$$

למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 34 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ -4 & 34 \end{pmatrix}$$

הגדרה: מטריצה A תיקרא סימטרית אם מתקיים: $A = A^t$. והיא תיקרא אנטי־סימטרית אם $A = -A^t$. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}^t$$

תכונות:

1. כאשר הכפל מוגדר: $(AB)^t = B^t A^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. לכל שתי מטריצות מאותו סדר מתקיים: $(A+B)^t = A^t + B^t$
4. עבור סקלאר α מתקיים: $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$

תרגילים:

1. הוכיחו שלכל מטריצה A, המטריצה AA^t הינה סימטרית.
   פתרון: לפי תכונה 1:
   $$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

2. תהא A מטריצה ריבועית ממשית אנטי־סימטרית. הוכיחו שכל איברי האלכסון הינם 0.
   פתרון: יהי $A_{i,i}$ איבר אלכסוני כלשהו. כיון שהמטריצה אנטי סימטרית אנחנו יודעים שמתקיים $A = -A^t$, ולכן בפרט $A_{i,i} = -(A^t)_{i,i} = -A_{i,i}$, ולכן $2A_{i,i} = 0 \Rightarrow A_{i,i} = 0$.\

1.4 מטריצות ריבועיות

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת ריבועית.מטריצות מיוחדות:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \forall i,j : A_{i,j} = 0$$

מתקיים: לכל $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

- $IA = AI = A$
- $0 + A = A + 0 = A$
- $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$

עוד סוגים:

- מטריצה משולשית עליונה:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

תחתונה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

- סקלארית:

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} = a \cdot I$$

תרגיל: הוכיחו שכפל של משולשיות עליונות היא משולשית עליונה.

פתרון: תהיינה A, B משולשיות עליונות, צריך להוכיח ש-AB גם כזו. כלומר, נתון $\forall i > j : A_{i,j} = 0, B_{i,j} = 0$, צריך להוכיח: $\forall i > j : (AB)_{i,j} = 0$, ואכן אם $i > j$ נקבל:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \cdot B_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} A_{i,k} \cdot \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = 0$$

בדומה, ניתן להוכיח שכפל של אלכסוניות הייא אלכסנית וכפל של סקלאריות היא סקלארית.