בוחן טופולוגיה תשעח

22/5/2018 (ח' סיוון)

מתרגלים: אחיה בר־און ותמר בר־און.

- ענו על כל השאלות. **יש לנמק כל תשובה!!**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. (על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.)**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- ניקוד: ניקוד אחיד בין הסעיפים, 18נקודות לכל סעיף (סה"כ $15 \times 7 = 105$ נקודות).
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. יהא $X=\mathbb{Z}$ עם המטריקה ה p- אדית d_p.

(א) הוכיחו כי כל כדור $B(x,r)$ הוא קבוצה סגוחה (לכל x שלם, לכל $0<r\in\mathbb{R}$).

פתרון:

ב.ש.ב.

(ב) נניח בסעיף זה כי $r=\frac{1}{26}$, $p=3$. מצאו/תארו את הכדור $B(0,r)$.[1]

פתרון:

לפי הגדרה

$$B(0,r)=\left\{x\in\mathbb{Z}:\ d_3(x,0)<\frac{1}{26}\right\}=\left\{x\in\mathbb{Z}:3^3|x\right\}=27\mathbb{Z}$$

2. יהא $X=\mathbb{R}$ ונגדיר $\tau=\{O\in P(\mathbb{R}):\ |O^c|\le\aleph_0\}\cup\{X,\emptyset\}$.

(א) הוכיחו כי τ טופולגיה על X.

פתרון:

- לפי הגדרה $X,\emptyset$ נמצאות ב τ
- איחוד כל שהוא: יהיו $O_i\in\tau$ אזי $\left|(\cup_{i\in I}O_i)^c\right|=\left|\cap_{i\in I}O_i^c\right|\le\left|O_j^c\right|\le\aleph_0$ כאשר O_jהיא אחת הקבוצות שאינה שווה ל $\emptyset$ (אם כל O_i קבוצה ריקה אז גם האיחוד וסיימנו).
- חיתוך של שניים: יהיו O_1,O_2 פתוחות אזי $\left|(O_1\cap O_2)^c\right|=\left|O_1^c\cup O_2^c\right|\le\left|O_1^c\right|+\left|O_2^c\right|=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

(ב) תהא $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שמתכנסת למספר ממשי x (ביחס ל τ) הוכיחו כי הסדרה קבועה לבסוף.

פתרון:

נניח בשלילה ש $x_n\to x$ שאינה קבוע לבסוף. אזי בה"כ $x_n\neq x$ לכל n ואז נגדיר $O=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}^c$ שהיא פתוחה כי המשלים בן מניה ו $x\in O$ לכן לפי הגדרת התכנסות קיים n שהחל ממנו $x_n\in O$. סתירה (O מוגדרת כך ש $x_n\notin O$ לכל n).

3. נגדיר $X=\mathbb{N}$ ונגדיר טופולוגיה על X כך $\tau_{\le}=\{\emptyset,X\}\cup\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כאשר $O_n=\{x\in\mathbb{N}:\ x\le n\}$.

(א) הוכיחו כי $(X,\tau_{\le})$ קשיר.

פתרון:

נניח בשלילה X קשיר. אזי קיימות קבצות פתוחות זרות לא ריקות O_m,O_n כך ש $X=O_n\cup O_m$ (הקבוצות הפתחות לא יכולות להיות שוות ל X כי אז הן לא יהיו זרות). אבל בה"כ $m\le n$ ומתקיים $O_m\subseteq O_n$ ובפרט לא זרות. סתירה.

(ב) הוכיחו כי כל פונקציה $f:(X,\tau_{\le})\to(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ רציפה היא קבועה (הערה: $\tau_{\mathbb{R}}$ היא הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$).

פתרון:

נניח בשלילה כי f אינה קבועה. אזי קיימים $m<n$ כך ש $f(m)\neq f(n)$ כיוון ש $\mathbb{R}$ הוא T_2אפשר למצוא 2 קבוצות פתחות זרות V_1,V_2 כך ש $f(m)\in V_1,f(n)\in V_2$. מרציפות נקבל כי קיימת קבוצה פתוחה $O\ni n$ כך ש $f(O)\subseteq V_2$. אבל אם $n\in O$ אזי $O=X$ או $O=O_k$ עבור $n\le k$. בכל מקרה נקבל כי $m\in O$ גם כן ונקבל כי $f(m)\in f(O)\subseteq V_2$. סתירה כיוון ש $f(m)\in V_1\cap V_2=\emptyset$.

(ג) תהא $A=X\setminus\{1,3,4\}$ הוכיחו כי A הומיאומורפי ל X (כאשר A עם טופולוגית תת מרחב).

[1] ציטוט ההגדרה $B(0,r)=\{x\in X:\ d_p(x,0)<r\}$ לא תתקבל כתשובה.

פתרון:

נגדיר $f : A \to X$ כך:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ n-3 & 5 \leq n \end{cases}$$

הפונקציה חח"ע ועל כי

n	$f(n)$
2	1
5	2
6	3
7	4
8	5
$\vdots$	$\vdots$

והיא רציפה כי לכל קבוצה פתוחה O_n מתקיים ש $f^{-1}(O_n) = O_{n+3} \cap A$ שהיא פתוחה ב A (כמובן שהתמונה ההפוכה של X היא A שפתוחה והתמונה הפוכה של הקבוצה הריקה היא קבוצה ריקה שגם פתוחה). בנוסף הפונקציה ההופכית

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ x+3 & 2 \leq x \end{cases}$$

גם רציפה כי לכל קבוצה פתוחה פתוחה ב A, $O_n \cap A$ מתקיים כי

$$g^{-1}(O_n \cap A) = \begin{cases} g^{-1}\{2\} = \{1\} & n \in \{1,2,3,4\} \\ O_{n-3} & 5 \leq n \end{cases}$$

(כמובן שהתמונה ההפוכה של A היא X שפתוחה והתמונה הפוכה של הקבוצה הריקה היא קבוצה ריקה שגם פתוחה). לכן A הומיאומורפי ל X.

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה __

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה___