תרגיל 11

1. נניח ש־(X,τ) מרחב טופולוגי ו־$A,B\subseteq X$ תת קבוצות קומפקטיות. האם $A\cap B$ קומפקטית?

2. הוכיחו או הפריכו: (X,τ_{cof}) קומפקטי.

3. הוכיחו שמספיק לבדוק קומפקטיות לפי אברי בסיס. כלומר, אם (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$\gamma\subseteq\tau$ בסיס ל־τ. אז X קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.

4. מתי הטופולוגיה הקו־מנייתית היא קומפקטית?

5. הראו ש־$([0,1],\tau_s)$ כלומר הקטע הסגור עם טופולוגיית סורגנפריי אינו קומפקטי.

6. הראו ש־$O_n(\mathbb{R})$ ־ קבוצת המטריצות האורתוגונלית (כלומר אלה שמקיימות $AA^T=I$) היא קומפקטית.

7. נניח ש־(X,τ) מרחב קומפקטי מטריזבילי. נסמן ב־$clop(X)$ את אוסף הקבוצות הסגוחות. הראו ש־$clop(X)$ בת מניה.

8. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. הוכיחו שאם $A,B\subseteq V$ הן תת קבוצות קומפקטיות אז גם

$$A+B:=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$$

קומפקטית.
<u>בונוס:</u> אותו תרגיל נכון גם עבור כל חבורה טופולוגית במקום V.

9. נניח ש־$(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים, $A\subseteq X,B\subseteq Y$ תת קבוצות קומפקטיות. אז לכל סביבה פתוחה $A\times B\subseteq O$ קיימות סביבות פתוחות $A\subseteq U,B\subseteq V$ כך ש־

$$A\times B\subseteq U\times V\subseteq O$$

10. נסמן את קבוצת קנטור ב־$C \subseteq \mathbb{R}$.

(א) הראו ש־$C \simeq C^2 \simeq C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}}$

(ב) הראו ש־C הומוגני

11. הוכיחו או הפריכו: ניתן לשכן טופולוגית את $[0,1]^{\mathbb{N}}$ במרחב הילברט l^2.

12. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור מרחב טופולוגי (X,τ):

(א) X קומפקטי, מטריזבילי וממימד אפס.

(ב) X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור