פתרון תרגיל 2

1. נחשב את הגבולות:

א. נשים לב שמדובר במצב בעייתי של אינסוף פחות אינסוף ולכן נכפיל ונחלק בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

ב. נוציא את החזקה הכי גבוהה של n כגורם ונקבל:

$$n^5(-2+\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5})=-\infty$$

2. א)

הוכחה:

$$a_n=b_n\cdot\frac{a_n}{b_n}\to 0\cdot 1=0$$

ב)

הפרכה:

למעשה **כל** סדרה מונוטונית יורדת (לא קבועה) היא הפרכה לשאלה זו.

לדוגמא: $a_n=\frac{1}{n}>0$ אך $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

כלומר, המשפט הנכון לגבי סדרות הוא - אם לכל n מתקיים $a_n>L$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n\ge L$.

3.

פתרון: לאחר פישוט נקבל $a_n=\frac{1}{n}\left(8^2(n-1)+2\cdot 8\cdot\frac{n(n+1)}{2n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=$

$$\frac{64(n-1)}{n}+\frac{8(n+1)}{n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

א) $\frac{64(n-1)}{n}\to 64$

ב) $\frac{8(n+1)}{n}\to 8$

ג) $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$

ולכן $lim_{n\to\infty}a_n=\frac{217}{3}$

4. $\Rightarrow$ לפי משפט מההרצאה, אפיסה כפול חוסה שווה אפיסה. ולכן c_n מתכנסת ל-0.

$\Leftarrow$ נניח ש c_n מתכנסת כלומר נניח כי: $\lim_{x\to\infty}c_n\to M$. ונניח בשלילה ש $L\neq 0$.

אזי, נקבל כי: $b_n=\frac{c_n}{a_n}$. לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל כי: $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\frac{M}{L}$

בסתירה לנתון כי b_n לא מתכנסת.

5. $a_n \to \infty$ **ולכן** $\frac{1}{a_n} \to 0$. ומכאן נקבל כי $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n+b_n}{a_n} = 0$ משום שלפי המשפט, אפיסה כפול חסומה שווה אפיסה. ולכן:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_n+a_n}{a_n} - \frac{a_n}{a_n}\right) = -1$$

6.

$$lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{3-8n^3} = 0$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}$$