פונקציה מצומצמת

הגדרה. תהי $f : X \to Y$ ותהי $A \subseteq X$. הפונקציה **f מצומצמת לA** מוגדרת על ידי: $f|_A : A \to Y$ כך ש-$f|_A(a) = f(a)$.

דוגמא. נביט ב-$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$ ואינה חח"ע. נכון לומר שהפונקציה המצומצמת $f|_{\mathbb{N}}$ כן חח"ע.

תרגיל. תהי $f : X \to Y$ פונקציה, הוכח שקיימת קבוצה A כך ש-$f|_A$ חח"ע עם אותה התמונה כמו הפונקציה המקורית (כלומר $im(f|_A) = im(f)$).

פתרון.

נסתכל על $im(f)$. נגדיר לכל $y \in im(f)$ את הקבוצה המקורות
$B_y = f^{-1}(\{y\})$

נוכל לבחור איבר יחיד מכל B_y, $x_y \in B_y$. נגדיר את הקבוצה A באופן הבא:

$$A = \{x_y \mid y \in Im(f)\}$$

בגלל שבחרנו מקור לכל תמונה ובאופן יחיד (בחרנו רק מקור אחד לכל תמונה)
$f|_A$ חח"ע והטווח זהה לטווח של f

תרגיל

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך ש $g \circ f$ חח"ע. הוכיחו כי $g|_{Im(f)}$ חח"ע.

$f' : A \to Im(f)$ $\quad$ $g|_{Im(f)} : Im(f) \to C$

$$g \circ f = g|_{Im f} \circ f'$$

f חח"ע כי $g \circ f$ חח"ע. f' חח"ע ועל (בגלל שצמצמנו את הטווח שלה ל $Im(f)$)

כלומר f' הפיכה

$$g|_{Im(f)} = \underbrace{g \circ f}_{\text{חח"ע}} \circ \underbrace{f'^{-1}}_{\text{חח"ע}}$$

לכן $g|_{Im(f)}$ חח"ע כהרכבה של פונקציות חח"ע.

עוצמות

הגדרה. יהיו A,B שתי קבוצות. אזי:

- אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל אז אומרים של A ול-B **יש אותה עוצמה** (סימון $|A| = |B|$)
- אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע אז אומרים כי העוצמה של A קטנה או שווה לזו של B. (סימון $|A| \leq |B|$)
- אם $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$ אזי אומרים כי העוצמה של A קטנה ממש מהעצמה של B (סימון $|A| < |B|$)

הערה: בעזרת אקסיומת הבחירה מוכיחים כי אם קיימת $f : A \to B$ על אזי $|B| \leq |A|$ (בעזרת התרגיל מתירגול קודם כי ניתן לצמצם את התחום של f כך שתהא חח"ע)

דוגמא. יהיו A ו-B שתי קבוצות סופיות. אזי אם מספר האיברים בהן שווה עוצמתן שווה, ואם מספר האיברים ב-A גדול מזה של B אזי עוצמתה של A גדולה יותר.

לכל קבוצה סופית בעלת n איברים, נאמר שעוצמתה הינה n. למשל
$|\{1, 2, 3\}| = |\{1, 5, 100\}|$

טענה. אם $A \subseteq B$ אזי $|A| \leq |B|$.

נגד: $f : A \to B$ $a \mapsto a$ פונקציית ההכלה

חח"ע (קל לראות)

תרגיל

הוכח כי עוצמת $\mathbb{N}$ שווה ל - $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ $f(n) = n-1$

$f^{-1} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ $f^{-1}(n) = n+1$

f-1 היא אכן הפיכה

תרגיל

הוכיחו כי $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}|$

$f: P(\mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$

$$f(B) = \begin{cases} \{1\} & B = \emptyset \\ \{n+1\} & \{n\}\ , n \in \mathbb{N} \\ B & \text{else} \end{cases}$$

תרגיל

נסמן $A = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ קבוצת הנקודונים הטבעיים. הוכיחו כי $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) - A|$

$f: P(\mathbb{N}) - A \longrightarrow P(\mathbb{N})$

$g: P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}) - A$

$\{n\} \longmapsto \{n,1\}$

$\{m,n\} \longmapsto \{m,n+1\}$ (לא תופס כי כאשר $m=n+1$ שולחים לקודם)

$B \longmapsto B$

$B \longmapsto B \qquad B \neq \{k,2k\} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \{1,2\}, \{2,4\}, \{3,6\}, \{4,8\}$

אי   זוגי

נחלק את המקרה של B מהצורה $\{k,2k\}$ לשני מקרים

$\{2k, 4k\} \longmapsto \{k, 2k\}$

$\{2k-1, 2(2k-1)\} \longmapsto \{k\}$

$\{1,2\} \longmapsto \{1\}$

$\{2,4\} \longmapsto \{1,2\}$

$\{3,6\} \longmapsto \{2\}$

$\{4,8\} \to \{2,4\}$

תרגיל

תהא A קבוצה . הוכיחו כי $|A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}| = |A^{\mathbb{N}}|$

$F : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ $f, g \in A^{\mathbb{N}}$

$(f,g) \longmapsto \begin{cases} f(n) & \text{זוגי } n \\ g(n) & \text{אי } n \end{cases} \leftarrow \varphi$

טענה אם $|A| = |A'|, \quad |B| = |B'|$ אזי $|A \times B| = |A' \times B'|$

לפי הנתון $f : A \to A'$ חח"ע ועל

$g : B \to B'$ חח"ע ועל.

$h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ $\qquad$ $h(a,b) = (f(a), g(b))$

h חח"ע ועל נובע מהחח"ע ועל של f,g.

תרגיל

תהא A קבוצה. הוכח כי $|A| \le |P(A)|$

פתרון: $f: A \to P(A)$ $\quad a \longmapsto \{a\}$

תהא A קבוצה. הוכח כי $|A| \ne |P(A)|$

נניח בשלילה שיש שוויון עוצמה ← קיימת $f: A \to P(A)$ הפיכה ובפרט על.

$$A \supseteq X = \{a \in A : a \notin f(a)\}$$

f על ← קיים $y \in A$ $\quad f(y) = X$

$y \in X$ ← $y \notin f(y)$ בסתירה $(f(y)=X)$

$y \notin X$ $\quad y \in f(y)$ ⟵ $y \in X$ בסתירה.

תרגיל

הוכיחו כי אם $|A| = |B|$ אזי $|P(A)| = |P(B)|$

קיימת $f: A \to B$ הפיכה. נגדיר $g: P(B) \longrightarrow P(A)$

$C \in P(B)\ ,\ C \longmapsto f^{-1}(C)$

לפי התרגיל הקודם g חח"ע.

תרגיל

נגדיר $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(n) < f(n+1)\}$ הוכיחו $|A| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

$f(n)=n+1$, $g(n)=n$

<u>פתרון:</u> נגדיר $F: A \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(n)-f(n-1) & n>1 \\ f(1), & n=1 \end{cases}$$

נוכיח F חח"ע ועל.

<u>חח"ע:</u> נניח $F(f_1)=F(f_2)$

$$\begin{cases} F(f_1)(1)=F(f_2)(1) \\ F(f_1)(2)=F(f_2)(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1)=f_2(1) \\ f_1(2)-f_1(1)=f_2(2)-f_2(1) \end{cases} \longrightarrow f_1(2)=f_2(2)$$

נניח $f_1(n)=f_2(n)$, נרצה להראות $f_1(n+1)=f_2(n+1)$

$$F(f_1)(n+1)=F(f_2)(n+1) \longrightarrow f_1(n+1)-f_1(n) = f_2(n+1)-f_2(n)$$

$$\downarrow$$

$$f_1(n+1) = f_2(n+1)$$

<u>על:</u> $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נמצא לו מקור. נגדיר $f(n)=\sum_{k=1}^{n} g(k)$

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(n)-f(n-1)=g(n) \\ f(1)=g(1) & n=1 \end{cases}$$

הראנו ש-f שהגדרנו מתפקד כמקור ל-g.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}}_{n}$ מעוצמת $\aleph_0$.

נוכיח באינדוקציה.

$n=1$ $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^1|$

נניח שעבור $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|\mathbb{N}^{n+1}| = |\underbrace{\mathbb{N}^n}_{|\mathbb{N}|} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$