תרגול 6-אושרית

תכונות של מרחב פורש, דרכי הצגה של מרחבים וקטוריים, תלות לינארית, בסיס ומימד

הג': יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2,...,v_n\in V$ ו- $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי הביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי של $v_1,...,v_n$.

דוג': $V=\mathbb{R}^2$ $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

אזי: $\pi\binom{1}{2}+3\cdot\binom{-1}{2}-\sqrt{3}\binom{2}{7}$ הוא צ"ל.

הג': המרחב הנפרש ע"י וקטורים $v_1,...,v_n$ מוגדר להיות קב' כל הצירופים הלינאריים של הוקטורים האלו.

$$span\{v_1,...,v_n\}=\{\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n \mid \alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$$

באופן כללי: תהא $S\subseteq V$ תת קב' של V (יכולה להיות אינסופית)

אזי - $span(S)=\{\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n \mid n\in\mathbb{N},\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}, v_1,...,v_n\in S\}$ = אוסף כל הצ"ל של כל תתי הקב' הסופיות של S.

נשמ"ע: הוכחה ישירה קלה - $\operatorname{span}(\ )$ הוא תמ"ו מרחב.

תרגיל:

הוכיחו כי $\operatorname{span}(S)$ הוא תמ"ו המרחב הקטן ביותר שמכיל את S.

כלומר - אם $W \leq V$ מקיים $S \subseteq W$ אזי - $\operatorname{span}(S) \subseteq W$

פתרון:

יהי $v \in \operatorname{span}(S)$ אזי לפי הגדרת span קיימים $v_1,\dots,v_n \in S$ וגם $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$ כך ש- $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$

$S \subseteq W$ וכן - $v_1,\dots,v_n \in W$, W תמ"ו ולכן סגור לחיבור ולכפל בסקלר ולכן- $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n \in W$

מש"ל

הערה: אם $S=\emptyset$ אזי $\operatorname{span}(S)=\{0\}$

תכונות: יהי V מ"ו, יהיו $A,B\subseteq V$ קב' ו- $U,W\leq V$ תת מ"ו -

1) $U+W=span(U\cup W)$

2) $span\{v_1,\dots,v_m\}+span\{v_{m+1},\dots,v_{m+k}\}=span\{v_1,\dots,v_{m+k}\}$

3) $span(A)+span(B)=span(A\cup B)$

4) $A\subseteq span(A)$

5) אם W תת מ"ו אז.. $span(W)=W$

6) $span(A)\subseteq span(B) \Leftarrow A\subseteq B$

7) $span(A)\subseteq span(B) \Leftarrow A\subseteq span(B)$

נוכיח ~~את~~ תכונה 7 כדוג' -, השאר מוצגים לשיעור הבא

~~הוכחת תכונה A,B~~

הוכחת תכונה 7: $span(A)\subseteq span(span(B)) \underset{\text{לפי תכונה 6}}{\Leftarrow} A\subseteq span(B)$

לפי תכונה 5 + העובדה ש- $span(B)$ הוא תת מ"ו

דוגמה: יהי $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, ונתון- $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\}$

צ"ל- לברר אילו ערכי הפרמטרים a,b מתקיים כי- $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in span(S)$

פתרון:

הבעיה שקולה לברור אילו ערכי a,b קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש-

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

שנה הבעיה לשאלה האם למערכת- $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&a\\1&3&2&b\end{array}\right)$ יש פתרון.

לשם כך- נדרג ונבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&a\\1&3&2&b\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1}&2&-2&a\\0&\underline{1}&4&b-a\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&3a-2b\\0&1&4&b-a\end{array}\right)$$

~~[illegible]~~ אין לנו שורה סתירה של אפסים

לכל-a,b מתקיים. $\Leftarrow$ $span(S)=\mathbb{R}^2$

<u>תרגיל בית</u>

דוגמה

$V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר - $S=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

מהו - $span(S)$?

מהו - $span(S)$?

נחפש $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש- $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=\bar{0}$

תזכורת: כשאומרים וקטור - הכוונה לכל אחד מאיברי a,b,c,d כווקטור

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[illegible]

נעבור למערכת משוואות:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

נחפש לאילו ערכים יש פתרון למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_4=R_4-R_1]{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4=R_4-R_3]{R_2=R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a+2c \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-a-c \end{array}\right)$$

יש פתרון $\longleftrightarrow$ אין שורת סתירה $\longleftrightarrow$ $b-a+2c=0$

$b+2c=a$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a=b+2c\right\} = \left\{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ b,c,d\in\mathbb{F}\right\}$$

מסקנה חשובה:

יש לנו 2 דרכים עיקריות להציג מרחב וקטורי: 1) כ- span

2) כפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות.

איך עוברים מ1 ל2??

הדגמה בעמוד הבא->

מעבר מהצגה ב ל-1: פותרים את המערכת ומציגים כשם למרחב האפס.

נתון-דוג׳ מס׳:

$$V=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

מוציאים) לצורת המקדמים למערכת משוואות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&x\\1&1&1&y\\1&3&2&z\\1&-1&0&w\end{array}\right)\xrightarrow[R_4=R_4-R_3]{R_3=R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&x\\1&1&1&y\\0&2&1&z-y\\0&-4&-2&w-z\end{array}\right)$$

מדרגים...

$$\xrightarrow[R_4=R_3+2R_1]{R_3=R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&x\\1&1&1&y\\0&0&0&z-y-x\\0&0&0&w-z+2x\end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון נדרוש כי -

$$z-y-x=0 \wedge w-z+2x=0$$

$$\Leftarrow \quad V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\; z-y-x=0 \wedge w-z+2x=0\right\}$$

$$\underbrace{N}_{\text{מטריצת המקדמים}}\begin{pmatrix}-1&-1&1&0\\2&0&-1&1\end{pmatrix}$$

תלות לינארית:

הג': יהיו V מ"ו מעל F. יהיו- וקטורים $v_1,\dots,v_n \in V$ כלשהם אז-

1) **צ"ל טריוויאלי-** צירוף לינארי שכל המקדמים שווים ל-0. כלומר - הצ"ל- $0\cdot v_1+0\cdot v_2+\dots+0v_n=0$

2) נאמר ש-$v_1,\dots,v_n \in V$ **בת"ל** אם הצ"ל **היחיד** שמתאפס הוא- הצ"ל הטריוויאלי.

בסימונים: $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0 \Rightarrow \forall i: \alpha_i=0$

3) $v_1,\dots,v_n \in V$ **ת"ל** אם הם לא בת"ל, באופן שקול- אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ לא כולם 0 כך שמתקיים $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$.

הגדרה: קב' $S\subseteq V$ ת"ל אם קיימת בתוכה קב' סופית של וקטורים, כך שהוקטורים בקב' ת"ל.

הערה: $\emptyset$ היא בת"ל.

תרגיל: קבעו אם הקב' הבאה- בת"ל.

$V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל

פתרון- נכון שכן- הדין הוא $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$ פירושו- $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

תרגיל: $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, האם הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל.

פתרון: נחשב הצירוף הלינארי המתאפס -

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש לנו משתנה חופשי z ולכן - יש ∞ פתרונות. ולכן - קיים פתרון לא טריוויאלי
ולכן - ת"ל.

תרגיל קל: יהי $0\neq v\in V$ אזי $\{v\}$ בת"ל.

הוכחה: $\alpha_1 v=0 \longleftrightarrow \alpha_1=0$. $\Leftarrow$ בת"ל.

תרגיל קל: תהי S קבוצה כך ש- $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ כך ש- $0\in S$ אזי S ת"ל.

פתרון: נניח בה"כ כי $v_1=0$ ולכן - $1\cdot\underbrace{v_1}_{0v}+0\cdot v_2+\dots+0\cdot v_n=0$, וזה צירוף לינארי שאינו טריוויאלי שמתאפס
ולכן - ת"ל

תרגיל: האם הפולינומים $x^3-x+1,\ 2x^2+x-1,\ x^3-1$ בת"ל?

פתרון:

$\alpha(x^3-x+1)+\beta(2x^2+x-1)+\gamma(x^3-1)=0$

נשים לב כי יותר נוח

להשתמש בוקטור הבסיס - $(\alpha+\gamma)x^3+2\beta\cdot x^2-(\alpha-\beta)x$

$$1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad x^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad x^3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$x^3-x+1\longmapsto\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$-1+x+2x^2\longmapsto\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$x^3-1\longmapsto\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4=R_4-R_1]{R_2=R_2+R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-1\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אין-לנו עמודה עם איבר חופשי ולכן - בת"ל -

עובדה: $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ בת"ל.

משפט (ללא הוכחה): $v_1,\dots,v_n \in V$ ת"ל $\longleftrightarrow$ 1 מהוקטורים הוא צ"ל של אחרים.

מסקנה: אם v_1 צרוף לינארי של האחרים ניתן להסיר אותו מאוסף הפורש $\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_n\} = \mathrm{span}\{v_2,\dots,v_n\}$

הקשר בין צירוף לינארי לפתרון מערכת משוואות לינאריות:

תרגיל: יהיו $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{F}^m$ ונגדיר $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ להיות מטריצה שעמודותיה $v_1,\dots,v_n$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

יהי $b \in \mathbb{F}^m$ וקטור פתרון

המשך משפט תרגיל 6:

הוכח: $b \in span\{v_1,\dots,v_n\}$ $\Longleftrightarrow$ קיים פתרון למערכת $Ax=b$ ובמקרה זה - $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ מקיים -

$$b=x_1v_1+\dots+x_nv_n$$

הוכחה: $Ax=b$ לפי הג' A נקבל -

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

ישירות - מכפל מטריצה נקבל כי

$$x_1v_1+\dots+x_nv_n=b$$

לכן - ברור שקיים פתרון למערכת $\Longleftrightarrow$ קיימים סקלרים כך ש- $b=x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_nv_n$ שזה שקול לכך ש- $b \in span\{v_1,\dots,v_n\}$

מש"ל

2) נניח שהוקטורים שייכים ל-F^n הוכח-שקיים צ״ל יחיד הנותן את b $\Leftrightarrow$ המטריצה הפיכה

מה ניתן-להסיק על הוקטורים במקרה זה

<u>פתרון:</u>

אם המטריצה הפיכה אז- $x=A^{-1}b$ הוא הפתרון היחיד.

נדרג את A קנונית נגיע למטריצת היחידה

ולהפך - אם קיים צירוף לינארי יחיד הנותן את b סלי-אז נדרג את

זה אומר ש-A הפיכה

<u>מסקנות מהתרגיל:</u>

1) כאשר המטריצה הפיכה אז- דרגה עבור $b=0$ מתקיים כי ל- $Ax=0$ יש פתרון יחיד הפתרון הטריוויאלי.

כלומר- עמודות A בת״ל.

2) A הפיכה $\Leftrightarrow$ A^t הפיכה ניתן להסיק ששורות A בת״ל.

$\Leftarrow$ מסקנה A הפיכה $\Leftrightarrow$ עמודות A בת״ל $\Leftrightarrow$ שורות A בת״ל.

<u>חשוב!</u> שימושי מאוד!!!

בסיס וממד:

הגדרה: יהי V מ"ו (מרחב וקטורי) מעל $\mathbb{F}$. קב' $B \subseteq V$ נקראת **בסיס** אם:

1) B בת"ל

2) B פורשת. כלומר- $span(B)=V$

הגדרה: $\dim V = |B|$ = ממד של V

משפט ההחלפה: ממד מוגדר היטב. כלומר לכל 2 בסיסים של V אותה עוצמה. אותו מס' איברים

משפט: לכל מ"ו קיים בסיס.

דוגמאות לבסיסים: (סטנדרטיים)

1) עבור $\mathbb{R}^3$ ← $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מסומנים באופן מקוצר: $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ שורה i

בסיס של וקטורי יחידה - מתאים לכל $\mathbb{F}^n$.

2) אם $V=\mathbb{C}^{3\times 2}$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

3) אם $V=\mathbb{R}_2[x]$: $B=\{1,x,x^2\}$ קנונית- בסיס של $\mathbb{F}_n[x]$: $B=\{1,x,\dots,x^n\}$

4) בסיס למרחב האפס - $\{0\}$ הוא - $\emptyset$.

הערה: מכך נובע כי כל קב' שמכילה את 0 היא ת"ל.

תרגיל:

יהא V מ"ו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס

אזי - כל $v\in V$ ניתן להצגה כצ"ל של B בצורה יחידה.

הוכחה:

יהי $v\in V$

1) קיום: ש-B פורשת את V קיים צ"ל של B ששווה ל-v.

2) יחידות: נניח ש-2 צ"ל של B שווים ל- $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ נוכיח כי אלו אותו צ"ל (כלומר המקדמים שווים)

כעת - נעביר אגף ונקבל - $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)\cdot v_i=0$ B בת"ל ולכן - $\forall i: \alpha_i-\beta_i=0$

$$\Downarrow$$

$\forall i \quad \alpha_i=\beta_i$

מושג

הגדרה: יהא V מ"ו, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ויהי $v\in V$.

ההצגה של v לפי בסיס B (נקרא - וקטור המקדמים) בצ"ל.

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \quad \longleftrightarrow \quad [v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in \mathbb{F}^n$$

וקטור קורדינטות

קריטריונים שקולים לבסיס:

1) B בסיס

2) B קב' בת"ל מקסימלית

3) B קב' פורשת של V מינימלית

<u>מסקנות:</u> 1) כל קב' B בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

2) לכל קב' פורשת S קיימת תת קב' שהיא בסיס.

<u>תרגיל:</u> מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

<u>פתרון:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ \boxed{y = -w} \\ x - y - z - w = 0 \\ x + \cancel{w} - z - \cancel{w} = 0 \\ \boxed{x = z} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ -w \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \; z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בהצלחה!!!