תרגיל 3-פיתרון

.1

תהיינה $\boldsymbol{A,B}$ קבוצות. הוכיחו כי $\boldsymbol{A \times B = B \times A}$ אם ורק אם $\boldsymbol{A = B}$ או $\boldsymbol{A = \phi}$ או $\boldsymbol{B = \phi}$.

פיתרון: אם $\boldsymbol{A = \phi}$ או $\boldsymbol{B = \phi}$ אז $A \times B = B \times A = \phi$, ואם $\boldsymbol{A = B}$ אז $A \times B = B \times A = A \times A$. כלומר, צד שמאל גורר את צד ימין.

נניח שצד ימין נכון. נפרק זאת לשני מקרים: מקרה ראשון ש$\boldsymbol{A = \phi}$ או $\boldsymbol{B = \phi}$, והמקרה השני ששתי הקבוצות אינן ריקות. במקרה הראשון צד שמאל מתקיים אוטומטית. נניח אם כך שמדובר במקרה השני. יהיו $a \in A$ ו $b \in B$. אזי $(a,b) \in A \times B$. בגלל ש$\boldsymbol{A \times B = B \times A}$, $(a,b) \in B \times A$, ולכן $a \in B$ וגם $b \in A$. מכיוון שלא הנחנו דבר על a פרט לכך ש $a \in A$ וקיבלנו $a \in B$, ישנה הכלה $A \subseteq B$. מכיוון שלא הנחנו דבר על b פרט לכך ש $b \in B$ וקיבלנו $b \in A$, ישנה הכלה $B \subseteq A$, ולכן $\boldsymbol{A = B}$.

.2

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + m - k$ משום שכאשר סופרים את האיברים של A ואז את האיברים של B אז בעצם סופרים את האיברים בחיתוך פעמיים, וכדי לקבל את מספר האיברים באיחוד צריך להפחית מהסכום את מספר האיברים בחיתוך.
2. באופן דומה ל1, $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = n + m - 2k$ כי האיברים בחיתוך נספרו פעמיים, וכלל לא רוצים לכלול אותם, אז מפחיתים פעמיים את מספר איברי החיתוך. במקרה של קבוצות החזקה $|P(A) \Delta P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - 2|P(A) \cap P(B)|$. כעת, קבוצה היא תת-קבוצה גם של A וגם של B אם ורק אם היא תת-קבוצה של החיתוך, ולכן $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$. כלומר, $|P(A) \Delta P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - 2|P(A \cap B)| = 2^n + 2^m - 2 \cdot 2^k = 2^n + 2^m - 2^{k+1}$.
3. $|(A \cap B) \times (B \cup A)| = |A \cap B| \cdot |B \cup A| = k(n + m - k)$.
4. $|(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}|) \times B| = |P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}| \cdot |B| = (2^n - 2)m$.

.3

R איננו יחס שקילות משום שאינו טרנזיטיבי, למשל $1R1.7$ וגם $1.7R2.4$ אך $1 \not R 2.4$.

S איננו יחס שקילות משום שאינו סימטרי, למשל $1S7$ אך $7 \not S 1$.

T איננו יחס שקילות משום שאינו סימטרי, למשל $1T7$ אך $7 \not T 1$.

.4

רפלקסיביות: $((a,b),(a,b)) \in G$ בגלל ש $(a,a) \in E$ (כי E יחס שקילות) וגם $(b,b) \in F$ (כי F יחס שקילות).

סימטריות: נניח $((a,b),(c,d)) \in G$, אזי $(a,c) \in E$ וגם $(b,d) \in F$. בגלל סימטריות של E ו F מתקיים $(c,a) \in E$ וגם $(d,b) \in F$, ולכן $((c,d),(a,b)) \in G$.

טרנזיטיביות: נניח $((a,b),(c,d)) \in G$ וגם $((c,d),(e,f)) \in G$. מהנתון הראשון מקבלים $(a,c) \in E$ וגם $(b,d) \in F$ ומהנתון השני מקבלים $(c,e) \in E$ וגם $(d,f) \in F$. בגלל הטרנזיטיביות של E ו F מתקיים $(a,e) \in E$ וגם $(b,f) \in F$, ולכן $((a,b),(e,f)) \in G$.