

פתרון תרגיל בית 4 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק ממעלה n , ותהי K/F הרחבה ממימד m . הראו שאם $(n, m) = 1$, אז $f(x)$ הוא אי פריק גם מעל K .

פתרון. נתבונן בהרחבה $K(a)/F$ עבור a שורש כלשהו של $f(x)$. מצד אחד

$$[K(a): F] = [K(a): K][K: F] = [K(a): K] \cdot m$$

ובנוסף, $n = [F(a): F] \mid [K(a): F]$ (הממד הוא n כי הפולינום המינימלי של a הוא $f(x)$, שמתאפס ב- a ואי-פריק). לכן $n \mid [K(a): K] \cdot m$ ומהנתון $(n, m) = 1$ נסיק $n \mid [K(a): K]$. מצד שני לפי למה מהכיתה $n = [F(a): F] \leq [K(a): K]$. לכן $[K(a): K] = n$. כלומר המעלה של הפולינום המינימלי של a מעל K היא גם n , ולכן $f(x)$ הוא הפולינום המינימלי מעל K (הוא מוגדר שם, מתאפס, ובמעלה הנכונה) מה שאומר שהוא אי-פריק מעל K .

שאלה 2 (אימון נוסף). מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

א. $\sqrt[3]{7}$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. רמז: העזרו בשיקולי ממד.

ג. $\sqrt[5]{7}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}]$.

ד. $\sqrt[4]{3}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

ה. $\sqrt{x} - 1$ מעל $\mathbb{Q}(x)$.

פתרון.

א. $\sqrt[3]{7}$ מאפס את הפולינום $x^3 - 7$ שהוא אי פריק מעל \mathbb{Q} לפי אייזנשטיין עבור 7, ולכן זה הפולינום המינימלי המבוקש.

ב. כבר ראינו כי $x^3 - 7$ מאפס את $\sqrt[3]{7}$. השאלה היא האם הוא אי פריק גם ב- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. נניח שהוא פריק. כלומר יש לו שורש $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. אז כמובן $\mathbb{Q}(a) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, אבל $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 3$ וכבר חישבנו

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$$

בסתירה לכפלויות הממד של הרחבת שדות. לכן $x^3 - 7$ אי פריק והוא הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{7}$ גם מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. זה מקרה פרטי של שאלה 1.

ג. זה מקרה פרטי נוסף של שאלה 1. חישבנו ש- $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 3$, וקל לחשב ש- $[\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}] = 5$. לכן הפולינום $x^3 - 7$ הוא שוב הפולינום המינימלי.

ד. $\sqrt[4]{3}$ מאפס את $x^4 - 3$. מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ הפולינום הזה מתפרק ל- $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$.
 כאשר הרכיב $x^2 - \sqrt{3}$ מתאפס ב- $\sqrt[4]{3}$.
 הפולינום המינימלי הוא בודאי לא לינארי כי $\sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ (ולא יכול להיות $\sqrt[4]{3} = a + b\sqrt{3}$ כי אנחנו יודעים ש- $(\sqrt[4]{3})^2, (\sqrt[4]{3})^3, \sqrt[4]{3}, 1$ הם בת"ל מעל \mathbb{Q} לפי השדה $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}]$). לכן הפולינום המינימלי הוא $x^2 - \sqrt{3}$.

ה. נסמן $\alpha = \sqrt{x} - 1$. נמצא פולינום המאפס את α לפי

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)^2 &= x \\ \alpha^2 - 2\alpha + (1 - x) &= 0\end{aligned}$$

לכן מאפס את הפולינום $\lambda^2 - 2\lambda + (1 - x) \in \mathbb{Q}(x)[\lambda]$. הפולינום המינימלי לא יכול להיות לינארי (כי $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}(x)$ משיקולי מעלה), ולכן זהו הפולינום המינימלי.

שאלה 3. יהי $f(x)$ פולינום אי פריק ממעלה 7 מעל \mathbb{Q} , ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ שורש של f . חשבו את $[\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) : \mathbb{Q}]$.

פתרון. ברור ש- $\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. אבל הממד של $\mathbb{Q}(\alpha)$ הוא ראשוני ולכן משיקולי ממד (כמו בתרגיל הבית הקודם) $\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) = \mathbb{Q}$ או $\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$. נניח כי $\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) = \mathbb{Q}$ לכן

$$\alpha^3 + \alpha = q \in \mathbb{Q}$$

אבל אז $x^3 + x - q$ הוא פולינום מאפס עבור α בסתירה לכך שהפולינום המינימלי של α הוא ממעלה 7. לכן בהכרח $\mathbb{Q}(\alpha^3 + \alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$ וממד ההרחבה הוא 7.

שאלה 4. חשבו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים מעל \mathbb{Q} ואת הממדים שלהם:

א. $x^4 + 4$

ב. $x^4 - 4$

ג. $x^6 - 2x^3 - 3$

ד. $x^p - 2$ עבור p ראשוני (בכיתה פתרנו עבור $p = 5$)

פתרון.

א. פירוק זריז יגלה כי

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

ומכאן שהשורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{2}i \cdot i$. ידוע לנו שבמרוכבים $\sqrt{2}i = 1 + i$, ולכן השורשים הם $\pm(1 + i), \pm(1 - i)$. נקבל ששדה הפיצול המבוקש הוא $\mathbb{Q}(\pm(1 + i), \pm(1 - i)) = \mathbb{Q}(i)$. הממד של ההרחבה הוא 2.

ב. פירוק זריז יגלה כי

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$$

ומכאן שהשורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$. לכן שדה הפיצול שלו הוא $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ כפי שראינו בכיתה. הממד של ההרחבה הוא 4.

ג. נציב $t = x^3$ ונפתור את המשוואה $t^2 - 2t - 3$. נקבל שני פתרונות $t = -1, 3$. כלומר

$$x^3 = -1, 3$$

נסמן ב- ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 6. אז כל השורשים הם

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\rho^2, \sqrt[3]{3}\rho^4$$

ונשים לב כי $\rho^3 = -1$. מכאן קל לבדוק ששדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \rho)$. את מאפס הפולינום $x^3 + 1$ שהוא פריק ומתפרק כ- $(x+1)(x^2 - x + 1)$. לכן $x^2 - x + 1$ הוא הפולינום המינימלי של ρ ו- $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 2$. כמו כן ברור ש- $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$. שוב, מפני שהממדים זרים נקבל

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$$

ד. השורשים של הפולינום הם $\sqrt[p]{2}\rho_p^j$ עבור $j = 0, \dots, p-1$, כאשר ρ_p הוא שורש יחידה p -פרימיטיבי (למשל $\exp(\frac{2\pi i}{p})$). מכאן ניתן להוכיח ששדה הפיצול הוא

$$\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \sqrt[p]{2}\rho_p, \dots, \sqrt[p]{2}\rho_p^{p-1}) = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \rho_p)$$

(ודאו שאתם יודעים להוכיח את השיויון הזה). ידוע לנו ש- $[\mathbb{Q}(\rho_p) : \mathbb{Q}] = p-1$ וקל לחשב ש- $[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}) : \mathbb{Q}] = p$. מכיוון שהם זרים, כי p ראשוני, לפי שאלה שכבר פתרנו נקבל $[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \rho_p) : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

בהצלחה!