גיאומטריה אלגברית I - מועד ב, 2009

① (a) $A=\{x^2-y^3+y=0\}\subset\{w_2\neq 0\},\mathbb{P}^2$

$w_2\neq 0 \to x=\frac{w_0}{w_2},\ y=\frac{w_1}{w_2}$

$$\Longrightarrow \frac{w_0^2}{w_2^2}-\frac{w_1^3}{w_2^3}+\frac{w_1}{w_2}=0 \Longrightarrow w_0^2w_2-w_1^3+w_1w_2^2=0$$

$$\longrightarrow \bar{A}=\{\bar{w}: w_0^2w_2-w_1^3+w_1w_2^2=0\}$$

② $X=A\times\mathbb{P}^1$.

(a) X לא פרויקטיבית (=סגורה), ואחרת

$$X=\bar{X}=\overline{A\times\mathbb{P}^1}=\bar{A}\times\bar{\mathbb{P}}^1=\bar{A}\times\mathbb{P}^1$$

וגם $A\times\mathbb{P}^1\neq\bar{A}\times\mathbb{P}^1$ כי למשל $(0,0,1)\in\bar{A}\not\subset\{w_2\neq 0\}$.

(b) X לא אפינית, לפי משפט - $\{\text{אפינית}\}\times\mathbb{P}^1$
אף פעם לא אפיני.

③ $\varphi:\bar{A}\to\mathbb{P}^1$

$\varphi(w_0,w_1,w_2)=(w_1,w_2)$

(a) כן. אמנם מתקיים $\varphi(1,0,0)=\bar{0}$, ולכן יש הרחבה שלה -

$$(w_1:w_2)=(w_1\cdot w_1^2 ; w_2\cdot w_1^2)=(w_0^2w_2+w_1w_2^2 ; w_2w_1^2)=$$
$$=(w_0^2+w_1w_2,\ w_1^2)=\tilde{\varphi}(w_0,w_1,w_2)$$

ומתקיים $\tilde{\varphi}(1,0,0)\doteq(1,0)\neq\bar{0}$, ולכן $\mathrm{Dom}\,\varphi=\bar{A}$.

(b). לא. למשל כי המקור של נקודה הוא לא נקודה:

$$\varphi^{-1}(1,0)=\{(w_0,1,0)\}$$

4) לפי ההגדרה $\mathbb{C}[A] = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle x^2-y^3+y\rangle}$

יהי $f \in \mathbb{C}[A]$, אז

$$f = \sum_{i,j} a_{ij}\cdot x^i y^j = \sum a_{ij}\cdot x^{2i}y^j + \sum a_{ij}\, x^{2i+1}\cdot y^j =$$

$$= \sum a_{ij}(y^3-y)^{2i}y^j + x\sum a_{ij}(y^3-y)^{2i}\cdot y^j$$

לכן כל $f \in \mathbb{C}[A]$ הוא מצורה $P_1(y) + xP_2(y)$.
מצד שני, כל פולינום כזה ניתן להציג כנ"ל, ולכן

$$\mathbb{C}[A] = \{P_1(y) + xP_2(y) : P_1, P_2 \in \mathbb{C}[y]\}$$

5) כל Conic הוא מצורה

C_u $a_{00}w_0^2 + a_{11}w_1^2 + a_{22}w_2^2 + a_{01}w_0w_1 + a_{02}w_0w_2 + a_{12}w_1w_2 = 0$

הנקודות הנתונות הן

$$\begin{cases} (1,0,0) \longrightarrow a_{00} = 0 \\ (0,0,1) \longrightarrow a_{22} = 0 \end{cases}$$

כעת, כדי ש-C_u תהיה פריקה, הדטרמיננטה של המקדמים צריכה להיות אפס (משפט שלמדנו),
לכן דורשים ש

$$0 = \det\begin{pmatrix} a_{00} & \frac12 a_{01} & \frac12 a_{02} \\ \frac12 a_{01} & a_{11} & \frac12 a_{12} \\ \frac12 a_{02} & \frac12 a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \underset{a_{00}=a_{22}=0}{=} \frac18 \det\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 - \frac18 a_{01}(0 - a_{02}a_{12}) + \frac18 a_{02}(a_{01}a_{12} - 2a_{11}a_{02})$$

$$= \frac14 a_{01}a_{02}a_{12} - \frac14 a_{02}^2 a_{11}$$

לכן $a_{02}(a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}) = 0$ וכן

$$U = \{\bar{a} \in \mathbb{P}^5 : a_{00} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_{02}(a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}) = 0\}$$

זו קבוצה פרוייקטיבית, והיא בוודאי פריקה
כי המשוואה האחרונה פריקה.