שיעורי בית 2

.

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$

(ב) $b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$

(ג) חשבו: $a^2\ , b^2, bab^{-1}, ab$

(ד) כמה תמורות $x \in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax=b$? מצאו אותם.

2. תהא $\sigma \in S_n$. ותהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$ לכל k טבעי.

(ג) תנו דוגמא ל$\sigma \in S_n$ שניתן להציגה כמכפלה של מחזורים (לא בהכרח זרים) $\sigma = \tau_1, \ldots, \tau_m$כך ש:

i. $\sigma^{-1} \neq \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

ii. קיים k טבעי כך ש $\sigma^k \neq \tau_1^k \cdots \tau_m^k$

3.

(א) הוכיחו פורמאלית כי עבור מחזור $(i_1, \ldots, i_m) \in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m) = (i_1, i_2)\,(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)$$

הוכיחו זאת ע"י בדיקה מפורשת כי לכל $x \in \{1,\dots,n\}$ מתקיים כי

$$(i_1,\dots,i_m)[x] = (i_1,i_2)(i_2 i_3)\dots(i_{m-1}i_m)[x]$$

(ב) הראו כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים והצגה זאת אינה יחידה.

4. הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר $t = \#\{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} :\ i<j, \sigma(j)<\sigma(i)\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. למשל עבור $\sigma=(1,2,3)$ מתקיים כי הזוג הסדור$(1,3)$ הוא היפוך סדר כי $1<3$ וגם $\sigma(3)<\sigma(1)$. גם הזוג הסדור$(2,3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $sgn(\sigma)=(-1)^2=1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.
משפט: תהא $\sigma \in S_n$ תמורה ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים אזי מתקיים

$$sgn(\sigma) = (-1)^m$$

[למשל את $\sigma=(1,2,3)$ ניתן להציג כ $(1,2)(2,3)$כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $sgn(\sigma)=(-1)^2$]

(א) תנו דוגמא ל 2 תמורות זוגיות ו 2 תמורות אי זוגיות ב S_5

(ב) יהא $1<n$נסמן את קבוצת התמורות האי זוגיות ב S_n ב A, נסמן את קבוצת התמורות הזוגיות ב B. הוכיחו כי $|A|=|B|$ ומצאו כמה תמורות זוגיות יש. [הדרכה: הגדירו $F: A \to B$ ע"י $F(\sigma)=(1,2)\sigma$ והוכיחו כי F מוגדרת היטב והפיכה]

(ג) הוכיחו כי לכל $\sigma_1,\sigma_2 \in S_n$ מתקיים כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$

5. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\dots i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma(i_1,i_2,\dots i_m)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))$$

למשל $\sigma=(1,2)(4,5)$ מתקיים כי

$$\sigma(2,3,5,6)\sigma^{-1} = (1,3,4,6)$$

6. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\ldots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 5 יכול להיות לעזר

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

(ג) הוכח את הטענה.