מתמטיקה בדידה הרצאה 14 תשפא

29 ביולי 2021

1 פונקציות - חזרה

הגדרה: פונקציה היא שלשה (f, A, B), ובד"כ רושמים $f : A \to B$, כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד המקיים $(a, b) \in f$ ואנחנו נוהגים לרשום $f(a) = b$ או $a \mapsto b$.

למשל: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדר ע"י $f(a) = |a|$. $Im(f) = \mathbb{N} \cup \{0\}$. f על.
אפשר גם $g : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ ע"י $g(z) = |z|$.
אפשר גם $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ע"י $h(z) = |z|$.
ההבדל בין g לבין h זה ש- g על, ואילו h לא. $Im(h) = [0, \infty)$.
הגדרות:

- פונקציה $f : A \to B$ תיקרא על אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.
- פונקציה $f : A \to B$ תיקרא חח"ע אם לכל $a_1, a_2 \in A$ מתקיים:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

באופן שקול:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

2 תמונה חלקית ותמונה הפוכה

ניזכר בהגדרת התמונה של פונקציה $f : X \to Y$:

$$Im(f) = \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

1. הגדרה: תהי $f : X \to Y$ פונקציה.

(א) לכל $A \subseteq X$ נגדיר את התמונה החלקית שלה (תחת f) להיות קבוצת התמונות של כל איברי A:

$$f[A] = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

(ב) לכל $B \subseteq Y$ נגדיר את התמונה ההפוכה שלה (תחת f) להיות קבוצת כל המקורות של כל איברי B:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

2. דוגמאות:

(א) ראינו קצת בציור, מוזמנים לצייר לעצמכם גם.

(ב) נגדיר $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = |x|$ אז:

$$f\left[(-1,1)\right] = [0,1)$$

$$f^{-1}\left[(2,3)\right] = (-3,-2) \cup (2,3)$$

$$f^{-1}\left[\{5.5\}\right] = \{5.5, -5.5\}$$

(ג) נגדיר $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$D[\mathbb{N}] = \{1\}$$

$$D\left[(0,1)\right] = \{0,1\}$$

$$D^{-1}\left[(0,1)\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid D(x) \in (0,1)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < D(x) < 1\} = \emptyset$$

$$D^{-1}\left[[0,1]\right] = D^{-1}\left[\{0,1\}\right] = \mathbb{R}$$

$$D[\mathbb{R}] = \{0,1\}$$

3. כמה הערות:

(א)

$$f[X] = Im(f), f^{-1}[Y] = X$$

(ב)

$$f[\emptyset] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

(ג) זכרו את הכלל:

$$x \in f^{-1}[B] \iff f(x) \in B$$

(ד) זכרו את הכלל:

$$y \in f[A] \iff \exists a \in A : f(a) = y$$

(ה) מתקיים:

$$A \neq \emptyset \iff f[A] \neq \emptyset$$

הוכחה לכיוון המעניין קצת יותר: ישנו $a \in A$ ואז $f(a) \in f[A]$.

(ו) יכול להיות שישנה $B \neq \emptyset$ כך ש- $f^{-1}[B] = \emptyset$. לדוגמא בפונקצייה לעיל $D^{-1}\left[(0,1)\right] = \emptyset$.

i. מה התנאי לכך שלכל $B \subseteq Y$ כך ש- $B \neq \emptyset$ יתקיים $f^{-1}[B] \neq \emptyset$. התנאי הוא: f על. הסבר: אם f על, ונניח שיש $b \in B$ אז בגלל שהפונקציה על בוודאי יש לו מקור, כלומר, ישנו $x \in X$ כך ש- $f(x) = b \in B$, ולכן $x \in f^{-1}[B]$.

4. משפט: תמונה חלקית שומרת הכלה: תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ותהיינה $A_1, A_2 \subseteq X$ כך ש- $A_1 \subseteq A_2$ אזי:

$$f\left[A_1\right] \subseteq f\left[A_2\right]$$

הוכחה: יהי $y \in f\left[A_1\right]$, לכן ישנו $x \in A_1$ כך ש- $f(x) = y$. מכיון ש- $A_1 \subseteq A_2$ אז $x \in A_2$, ולכן $y = f(x) \in f\left[A_2\right]$. מש"ל.

5. משפט: תמונה הפוכה שומרת הכלה: תהי $f:X\to Y$ פונקציה, ותהיינה $B_1,B_2\subseteq Y$ כך ש־ $B_1\subseteq B_2$ אזי:

$$f^{-1}\left[B_1\right]\subseteq f^{-1}\left[B_2\right]$$

הוכחה: יהי $x\in f^{-1}\left[B_1\right]$. זאת אומרת $f(x)\in B_1$. מכיון ש־ $B_1\subseteq B_2$ נקבל ש־ $f(x)\in B_2$, ולכן לפי ההגדרה $x\in f^{-1}\left[B_2\right]$. מש"ל.

6. תמונה חלקית "עובדת" עם איחוד: תהי $f:X\to Y$ פונקציה, ותהיינה $A_1,A_2\subseteq X$ אזי:

$$f\left[A_1\cup A_2\right]=f\left[A_1\right]\cup f\left[A_2\right]$$

הוכחה: נראה הכלה בשני הכיוונים:

(א) $\subseteq$: יהי $y\in f\left[A_1\cup A_2\right]$, זאת אומרת שקיים $x\in A_1\cup A_2$ כך ש־ $f(x)=y$. אם $x\in A_1$ אז $f(x)\in f[A_1]\subseteq f[A_1]\cup f[A_2]$. בדומה, אם $x\in A_2$ אז $f(x)\in f[A_2]\subseteq f[A_1]\cup f[A_2]$.

(ב) $\supseteq$: יהי $y\in f[A_1]\cup f[A_2]$. אם $y\in f[A_1]$ אז ישנו $x\in A_1\subseteq A_1\cup A_2$ כך ש־ $f(x)=y$ ולכן $y\in f[A_1\cup A_2]$. בדומה עבור $y\in f[A_2]$.

7. משפט: תמונה הפוכה "עובדת" עם חיתוך: תהי $f:X\to Y$ פונקציה, ותהיינה $B_1,B_2\subseteq Y$ אזי:

$$f^{-1}\left[B_1\cap B_2\right]=f^{-1}\left[B_1\right]\cap f^{-1}\left[B_2\right]$$

הוכחה:

$$x\in f^{-1}\left[B_1\cap B_2\right]\iff f(x)\in B_1\cap B_2\iff f(x)\in B_1\wedge f(x)\in B_2$$

$$\iff x\in f^{-1}\left[B_1\right]\wedge x\in f^{-1}\left[B_2\right]\iff x\in f^{-1}\left[B_1\right]\cap f^{-1}\left[B_2\right]$$

8. משפט: תהי $f:X\to Y$ פונקצייה, ותהי $A\subseteq X$. אזי מתקיים:

(א) $A\subseteq f^{-1}\left[f[A]\right]$.

הוכחה: יהי $a\in A$, לכן $f(a)\in f[A]$, ומכאן נקבל $a\in f^{-1}\left[f[A]\right]$. מש"ל.

(ב) אם f חח"ע אז יש שיוויון: $A = f^{-1}\left[f[A]\right]$.

הוכחה: נותר להוכיח את ההכלה בכיוון השני: יהי $x \in f^{-1}\left[f[A]\right]$, ומכאן נקבל $f(x) \in f[A]$. לכן, ישנו $a \in A$ כך ש- $f(a) = f(x)$. f חח"ע ולכן נקבל $a = x$, וכמו ש- $a \in A$ אז כמובן $x \in A$. מש"ל.

(ג) מצאו דוגמא ל-f ו-A כך שאין שיוויון. עשינו בציור.

9. משפט (הוכחה ב- XI): תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ותהי $B \subseteq Y$ אזי מתקיים:

(א) $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$.

(ב) אם f על אז יש שיוויון.

3 הרכבת פונקציות

1. הגדרה: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות, נגדיר את פונקציית ההרכבה $g \circ f : A \to C$ ע"י הכלל:

$$(g \circ f)(a) = g\left(\underbrace{f(a)}_{\in B}\right) \in C$$

2. דוגמאות:

(א) עשינו ציור, מוזמנים לעשות לעצמכם גם.

(ב) נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ע"י הכלל $f(n) = n - 1$. נגדיר $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ע"י הכלל $g(n) = |n| + 1$. אז:

i. $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ולמשל:

$$g \circ f(16) = g(f(16)) = g(15) = |15| + 1 = 16$$

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n-1) = |n-1| + 1 = n - 1 + 1 = n$$

אם אתם זוכרים, לפונקציה הזו יש שם "פונקציית הזהות":

$$g \circ f = I_{\mathbb{N}}$$

ii. $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ולמשל:

$$f \circ g(0) = f(g(0)) = f(1) = 0$$

$$f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(3) = 2$$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(|n| + 1) = |n| + 1 - 1 = |n|$$

(ג) נגדיר $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = 2x$$

$$g(x) = x^2$$

נתבונן בהרכבה בשני הכיוונים:

i. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י הכלל:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

ii. $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י הכלל:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$$

3. תכונות ההרכבה:

(א) ההרכבה היא קיבוצית: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ פונקציות, אזי מתקיים:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

הוכחה: ניזכר שבהגדרת שיוויון פונקציות דרשנו: תחום וטווח שווים + התמונה של כל איבר בתחום שווה ע"י שתי הפנוקציות. אצלנו: תשתכנעו שהתחום והטווח שווים, ונראה את השיוויון:

$$\forall a \in A : (h \circ g) \circ f(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h(g \circ f(a)) = h \circ (g \circ f)(a)$$

(ב) ההרכבה לא דווקא חילופית: ראינו.

(ג) קיום איבר ניטרלי:

i. פונקציית הזהות $I_A : A \to A$ מקיימת: לכל פונקציה $f : A \to B$ מתקיים

$$f \circ I_A = f$$

ii. פונקציית הזהות $I_B : B \to B$ מקיימת: לכל פונקציה $f : A \to B$ מתקיים:

$$I_B \circ f = f$$

הוכחה: תחום וטווח תשתכנעו. שיוויון:

$$\forall a \in A : f \circ I_A(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

$$\forall a \in A : I_B \circ f(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

4. משפט: הרכבה של חח"ע היא חח"ע: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות חח"ע, אזי $g \circ f$ חח"ע.
הוכחה: נניח

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$$

צריך להוכיח: $a_1 = a_2$. לפי הגדרת הרכבה נקבל:

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

מחח"ע של g נקבל:

$$f(a_1) = f(a_2)$$

כעת, מחח"ע של f נקבל

$$a_1 = a_2$$

מש"ל.

5. משפט: הרכבה של פונקציות על היא פונקציה על: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות על, אזי $g \circ f : A \to C$ פונקציה על.
הוכחה: צריך להוכיח שלכל איבר בטווח יש מקור. יהי $c \in C$, הפונקציה g היא על, ולכן יש $b \in B$ כך ש־ $g(b) = c$. מכיון ש־ f על אז יש $a \in A$ כך ש־ $f(a) = b$, ונקבל:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

ומצאנו מקור ל־c. מש"ל.

6. משפט: אם ההרכבה חח"ע אז הימנית חח"ע: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך ש־ $g \circ f$ חח"ע. אזי: f חח"ע.
הוכחה: נתון לנו $g \circ f : A \to C$ חח"ע, וצריך להוכיח חח"ע של f. יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש־

$$f(a_1) = f(a_2)$$

מכיון ש־ g היא פונקציה (ולכן חד־ערכית) נקבל:

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

מהגדרת הרכבה נקבל:

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$$

ומכיוון שההרכבה חח"ע, נקבל $a_1 = a_2$. מש"ל.

7. משפט: אם ההרכבה על אז השמאלית על: תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציית כך ש־ $g \circ f : A \to C$ על C. אזי: g על C.
הוכחה: יהי $c \in C$, צריך למצוא $b \in B$ כך ש־ $g(b) = c$. מכיון שההרכבה על אנחנו יודעים שיש $a \in A$ כך ש־:

$$g \circ f(a) = c$$

מהגדרת הרכבה נקבל:

$$g(f(a)) = c$$

וניקח את $b = f(a)$ ואז:

$$g(b) = g(f(a)) = c$$

8. דוגמא: $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י:

$$f(n)=2n$$

$$g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k\\ \frac{n+1}{2} & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k-1\end{cases}$$

שימו לב שההרכבה

$$g\circ f(n)=g(f(n))=g(2n)=n$$

קיבלנו שההרכבה היא הזהות $I_{\mathbb{N}}$, שהיא כמובן חח"ע ועל, ולכן הימנית חח"ע והשמאלית על, וזה כמובן קורה.
מה קורה להרכבה בכיוון השני?

$$f\circ g(n)=f(g(n))=f\left(\begin{cases}\frac{n}{2} & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k\\ \frac{n+1}{2} & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k-1\end{cases}\right)=\begin{cases}n & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k\\ n+1 & \exists k\in\mathbb{N}:n=2k-1\end{cases}$$

וקיבלנו שההרכבה בכיוון זה היא לא פונקציית הזהות, אלא פונקציה אחרת.

4 הפיכות

1. הגדרה: פונקציה $f:A\to B$ תיקרא הפיכה אם קיימות $g,h:B\to A$ כך ש־:

$$g\circ f=I_A,\ f\circ h=I_B$$

(א) טענה: במקרה זה מתקיים: $g=h$
הוכחה:

$$g=g\circ I_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=I_A\circ h=h$$

(ב) מסקנה: ההופכית של f יחידה, ולכן נסמן אותה ב־ f^{-1}. ההופכית של f^{-1} היא כמובן f.

(ג) הערה: כאשר דיברנו על תמונה הפוכה גם סימנו ע"י f^{-1}, אם כי בכלל לא בטוח שיש הופכית, וסמנו סימון זה גם על פונקציות לא הפיכות. איך נבדיל?

i. סוגריים מרובעות מלמדות על תמונה הפוכה של תת קבוצה של הטווח.

$$f^{-1}[B']$$

ii. סוגריים עגולות מלמדות על הפעולה של הפונקצייה ההופכית (אם קיימת) על איבר מסויים של הטווח.

2. דוגמא: $f:\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י

$$f(n)=2n$$

הפיכה כי יש $g:2\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י:

$$g(2n)=n$$

ההרכבה בשני הצדדים היא הזהות:

$$\forall n\in\mathbb{N}:g\circ f(n)=g(f(n))=g(2n)=n$$

$$\forall 2n\in 2\mathbb{N}:f\circ g(2n)=f(g(2n))=f(n)=2n$$

וקיבלנו $g=f^{-1}$.

3. הערה: לא מספיק הופכית מצד אחד, כי בדוגמא 8 לעיל ראינו פונקציות שההרכבה בצד אחד זה הזהות, ואילו בצד השני לא. למשל אם

$$f\circ g=I_B, g\circ f\neq I_A$$

אז שתיהן לא הפיכות (לא יכול להיות שיש אחרת, כי הוכחנו יחידות). מי שרוצה, מוזמן במצב זה לקרוא ל־ f הפיכה מימין, ול־ g הפיכה משמאל.

4. משפט: תהי $f:A\to B$ פונקציה. אזי: f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.
הוכחה: $\Leftarrow$: נתון ש־ f הפיכה ולכן יש $g:B\to A$ כך ש־

$$g\circ f=I_A, f\circ g=I_B$$

נתבונן רגע ב־ $g\circ f=I_A$. פונקציית הזהות תמיד חח"ע, ולכן ההרכבה $g\circ f$ חח"ע, ולכן לפי משפט לעיל f (הימנית) חח"ע.
נתבונן רגע ב־ $f\circ g=I_B$. פונקציית הזהות תמיד על, ולכן ההרכבה $f\circ g$ על, ולכן f (השמאלית) על.
בסה"כ: f חח"ע ועל.
$\Rightarrow$: נתון $f:A\to B$ חח"ע ועל. צריך להוכיח שהיא הפיכה. נגדיר

$$f^{-1}\subseteq B\times A$$

ע"י הכלל:

$$f^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in f\}=\{(b,a)\mid f(a)=b\}$$

טענה: f^{-1} פונקציה, ובנוסף, היא ההופכית.