בוחן במבנים דיסקרטיים

שם:	תעודת זהות:

יש לענות על כל השאלות <u>על דף הבוחן</u>. שימו לב ש**<u>לבוחן יש שני צדדים</u>**. משך הבוחן הוא שעה.

שאלה 1 (30 נקודות)

מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס שני מספרים שלמים $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש-$54\alpha+33\beta=\gcd(54{,}33)$.

פתרון

נבצע אלגוריתם אוקלידס:

```
54 = 1 * 33 + 21   →  21 = 54 - 33
33 = 1 * 21 + 12   →  12 = 33 - 21 = 33-(54-33) = -54+2*33
21 = 1 * 12 +  9   →  9 = 21 - 12 = (54-33)-(-54+2*33) = 2*54-3*33
12 = 1 *  9 +  3   →  3 = 12 - 9 = (-54+2*33)-(2*54-3*33)= -3*54+5*33
 9 = 3 *  3 +  0
```

לכן, $\gcd(54{,}33)=3$ ו-$3=(-3)\cdot 54+5\cdot 33$.

שאלה 2 (30 נקודות)

תהי G חבורה ציקלית סופית עם k איברים. הוכיחו כי לכל $g\in G$ מתקיים $g^k=e$. [אין להיעזר במשפט לגרנז' או במסקנות שלו.]

הוכחה

קיים $x\in G$ כך ש-$G=\langle x\rangle$ (כי G ציקלית). אזי $o(x)=|\langle x\rangle|=|G|=k$.

כעת, יהי $g\in G$. אזי קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש-$g=x^n$.

היות ו-$o(x)=k$ מתקיים $g^k=(x^n)^k=\left(x^k\right)^n=e^n=e$, כדרוש.

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי G חבורה ותהי H תת חבורה של G. נגדיר $N = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$. הוכיחו כי N תת חבורה <u>של G</u> ו-H תת חבורה נורמלית <u>של N</u>.

הוכחה

<u>נוכיח כי N תת חבורה:</u> מספיק להראות:

א. <u>$N \neq \phi$</u>: באמת, מתקיים $eHe^{-1} = eHe = H$ ולכן $e \in N$ ובפרט $N \neq \phi$.
ב. <u>אם $x, y \in N$ אז $xy \in N$</u>: היות ו-$x, y \in N$ מתקיים $xHx^{-1} = yHy^{-1} = H$. לכן, $(xy)H(xy)^{-1} = xyHy^{-1}x^{-1} = x(yHy^{-1})x^{-1} = xHx^{-1} = H$ ונובע ש-$xy \in N$.
ג. <u>אם $x \in N$, אז $x^{-1} \in N$</u>: מתקיים $xHx^{-1} = H$. לכן, $x^{-1}H(x^{-1})^{-1} = x^{-1}Hx = x^{-1}(xHx^{-1})x = (x^{-1}x)H(x^{-1}x) = eHe = H$ ונובע ש-$x^{-1} \in N$.

לכן, N תת חבורה של G.

<u>נוכיח כי H תת חבורה נורמלית של N:</u>

ראשית נראה כי $H \subseteq N$: יהי $h \in H$. אזי לפי משפט $hH = Hh = H$. היות ו-H תת חבורה, $h^{-1} \in H$ (סגירות להופכי) ולכן גם $Hh^{-1} = H$. כעת נובע ש-$hHh^{-1} = (hH)h^{-1} = Hh^{-1} = H$, כלומר $h \in N$, כדרוש.

כעת נראה כי H תת חבורה של N: H תת חבורה של G ולכן היא לא ריקה (תנאי א) וסגורה לכפל (תנאי ב) ולהופכי (תנאי ג). אבל זה גם אומר שהיא תת חבורה של N.

לבסוף, נראה כי H נורמלית ב-N: יהי $x \in N$, אזי מהגדרת N מתקיים $xHx^{-1} = H$. זה אומר ש-$xHx^{-1} = H$ לכל $x \in N$, ולפי אחת ההגדרות השקולות לנורמליות שראינו בשיעור, H נורמלית ב-N.

מש"ל.

שאלה 4 (10 נקודות)

הגדירו הומומורפיזם של חבורות. (אין צורך להגדיר חבורה!)

פיתרון

תהיינה G, H חבורות. פונקציה $f: G \to H$ נקראת <u>הומומורפיזם</u> אם לכל $x, y \in G$ מתקיים $f(xy) = f(x)f(y)$. (באגף ימין הכפל הוא ב-H ובאגף שמאל הכפל הוא ב-G).