אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 10

שאלה 1 (בסיס נורמלי ושימושיו)

הגדרה: תהי E/F הרחבת גלואה ממימד סופי. *בסיס נורמלי* ל-E/F הוא בסיס B של E כמרחב וקטורי מעל F כך שקיים $a \in E$ עבורו $B = \{\sigma a | \sigma \in Gal(E/F)\}$. [כלומר, B הוא מסלול תחת הפעולה של $Gal(E/F)$ על E.]

משפט הבסיס הנורמלי: לכל הרחבת גלואה ממימד סופי קיים בסיס נורמלי.[1]

שאלות:

1. תהי E/F הרחבת גלואה ממימד סופי ויהי $a \in E$ כך ש- $B = \{\sigma a | \sigma \in Gal(E/F)\}$ בסיס נורמלי. הוכיחו כי לכל $H \le Gal(E/F)$ מתקיים $E^H = F[\sum_{\sigma \in H} \sigma a]$. [רמז: מהם צמודי גלואה של $\sum_{\sigma \in H} \sigma a$?]
2. יהי $p > 2$ ראשוני ו-$\rho_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$. הראו כי $\{\rho_p, \rho_p^2, \dots, \rho_p^{p-1}\}$ בסיס נורמלי ל-$\mathbb{Q}[\rho_p]/\mathbb{Q}$. (ניתן להיעזר בתרגיל בית 9).
3. בעזרת סעיפים 1 ו-2 או בכל דרך אחת, ציירו דיאגרמה של כל שדות הביניים $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_{13}]$. ציינו ליד כל שדה לאיזו תת חבורה של $Gal(\mathbb{Q}[\rho_{13}]/\mathbb{Q})$ הוא מתאים. אין צורך להוכיח את כל הפרטים, אך עליכם לרשום תשובה נכונה [ראו דוגמא לדיאגרמה למטה].
4. הוכיחו בעזרת משפט הבסיס הנורמלי או בכל דרך אחרת את "משפט האבר הקדום": לכל הרחבה ספרבילית ממימד סופי K/F קיים $a \in K$ כך ש-$K = F[a]$. [רמז: סגור גלואה + סעיפים קודמים.]

שאלה 2

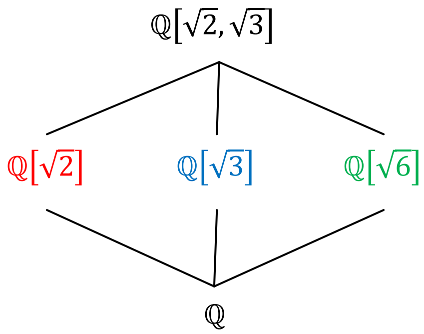
עבור כל אחת מהרחבות הגלואה הבאות[2] ציירו דיארמה של תתי החבורות של חבורת גלואה ודיאגרמה של שדות ביניים. עליכם לציין איזה שדה מתאים לאיזו תת-חבורה. [ראו דוגמא עבור השדה $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ בסוף.] אין צורך להוכיח את כל הפרטים[3], אך על הדיאגרמות וההתאה בין השדות והחבורות להיות נכונות.

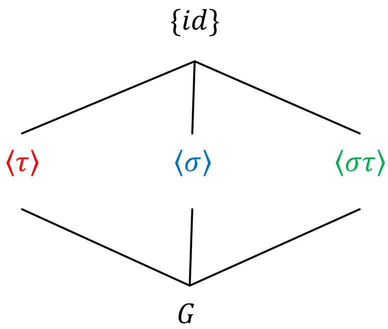
1. $K/\mathbb{Q}$ באשר K שדה הפיצול של $x^3 - 3$.
2. $K/\mathbb{Q}$ באשר K שדה הפיצול של $x^4 - 6x^2 - 2$ (אתם רשאים להיעזר בפתרון תרגיל בית מספר 5, שם מחושב שדה הפיצול והמימד שלו.) [רמז: מתקיים $\sqrt{3 + \sqrt{11}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{11}} = \sqrt{-2}$ ו-$\sqrt{11} \in K$.]

דוגמא לפיתרון עבור ההרחבה $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$:

תהי $G = Gal(\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q})$ ו-$\sigma, \tau \in G$ מוגדרות ע"י $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ו-$\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. אזי $G = \{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$. הדיאגרמות הן:

[1] אבל לא תמיד קל למצוא בסיס כזה...
[2] אין צורך להראות שהן גלואה
[3] אלא אם לא ברור בכלל מדוע השדה שרשמתם מתאים לתת חבורה מסויימת.





כל תת שדה מתאים לתת החבורה הנמצאת במיקום שלו בדיאגרמה של תתי החבורות.

בנוגע למה ששאלתם בכיתה: נניח ש-E/F גלואה ממימד סופי ו-$H \leq Gal(E/F)$ נתונה. אם אין לכם מושג מהו E^H ואין לכם בסיס נורמלי (כמו במקרה של הרחבה ציקלוטומית), עדיין אפשר למצוא את E^H באופן הבא:

נניח ש-$H = \langle\sigma_1, \dots, \sigma_r\rangle$, אזי אברי E^H הם הפתרונות של מערכת המשוואות $\sigma_1 x = x,\ \ \sigma_2 x = x,\ \ \dots,\ \ \sigma_r x = x$. כל σ_i היא העתקה לינארית מעל F ולכן אם נבחר בסיס כלשהו B ל-E/F, ניתן לתרגם כל משוואה $\sigma_i x = x$ למספר משוואות לינאריות מעל F (אם $x = \sum_{b\in B}\alpha_b b$ באשר $\{\alpha_b\}_{b\in B} \subseteq F$, אז המשוואות יהיו על הנעלמים $\{\alpha_b\}_{b\in B}$). אפשר לפתור את המשוואות ולקבל איברים של E^H.

זו דרך קצת ארוכה, והיא גם דורשת לעבוד עם בסיס ל-E/F. לכן עדיף להשתמש בה כמוצא אחרון.