בס"ד

אלגברה לינארית - תירגול 4

הנושא: קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

משפט קיילי-המילטון: כל מטריצה ריבועית מאפסת את הפולינום האופייני שלה. (כלומר שאם נציב את המטריצה בפולינום האופייני נקבל 0).

דוגמא: הפולינום האופייני של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ הוא:

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda+2-6=$$

$$=\lambda^2-3\lambda-4$$

נציב את המטריצה A בפולינום האופייני שקיבלנו ונקבל:

$$\underbrace{f_A(A)}_{A^2-3A-4\cdot I}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}^2-3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}-4\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{=I}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו כצפוי ש- $f_A(A)=0$.

תרגיל: נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ השתמש במשפט קיילי-המילטון לחישוב המטריצות A^3, A^4, A^{-1}.

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

נציב בו את A ונשווה ל-0:

$$f_A(A)=A^3-A^2-A+I=0$$

$$\Downarrow$$

$$A^3=A^2+A-I=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

<u>סעיף</u> כעת נחשב את A^4:

קיבלנו ש: $A^3 \overset{(*)}{=} A^2+A-I$ נכפול את השוויון ב-A ונקבל:

$$A^4 = A^3+A^2-A \overset{\text{לפי }(*)}{=} \underbrace{A^2+A-I}_{A^3}+A^2-A$$

$$=2A^2-I=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&2\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כעת נמצא את A^{-1}:

אמרנו ש:

$$A^3-A^2-A+I=0$$
$$\Downarrow$$
$$-A^3+A^2+A=I$$
$$A(-A^2+A+I)=I$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}=-A^2+A+I=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u> מצא פולינום אופייני עבור $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\5&10&-4\\16&32&-12\end{pmatrix}$ ובעזרתו את A^{-1}.

<u>פתרון:</u>

הפולינום האופייני הוא:

$$f_A(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

נציב בו את A ונשווה ל-0:

$$f_A(A)=A^3+2A^2+3A+4I=0$$
$$\Downarrow$$
$$I=\frac{A(A^2+2A+3)}{-4}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{A^{-1}=\frac{A^2+2A+3}{-4}}$$

הפולינום המינימלי

<u>הגדרה</u>: פולינום ממעלה n נקרא <u>פולינום מתוקן</u> אם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר שלו שווה ל- 1.

<u>הגדרה</u>: תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. הפולינום המתוקן ממעלה חיובית מינימלית אשר מתאפס ע"י A נקרא - <u>הפולינום המינימלי</u> של A.

<u>משפט 1</u>: סקלר λ הוא ע"ע של מטריצה A אמ"מ λ הוא שורש של הפולינום המינימלי של A.

<u>משפט 2</u>: הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני של A.

<u>משפט 3</u>: לפולינום המינימלי ולפולינום האופייני של A יש אותם גורמים אי-פריקים.

<u>משפט</u>: אם $A,B\in M_n(F)$ דומות אז לשתיהן אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי.

<u>תרגיל 1</u>: מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0&0\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-2&0\\0&0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3\cdot(\lambda-5)$$

לפי משפט 3, הגורמים $(\lambda-5),(\lambda-2)$ הם גורמים של הפולינום המינימלי.
לפי משפט 2, הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני של A, לכן הפולינום המינימלי הוא אחד מהפולינומים הבאים:

$$(\lambda-2)(\lambda-5),\quad(\lambda-2)^2(\lambda-5),\quad(\lambda-2)^3(\lambda-5)$$

ממשפט קיילי המילטון ידוע ש: $(A-2I)^3(A-5I)=0$.

נבדוק ונראה ש: $(A-2I)(A-5I)\neq 0$

ואילו: $(A-2I)^2(A-5I)=0$.

לכן $(\lambda-2)^2(\lambda-5)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

מ.ש.ל.

תרגיל 2: מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\det(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0&0\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-1&-1\\0&0&2&\lambda-4\end{pmatrix}=$$

$$(\lambda-2)\left[\det\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-1&-1\\0&2&\lambda-4\end{pmatrix}\right]-(-1)\left(\det\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda-1&-1\\0&2&\lambda-4\end{pmatrix}\right)=$$

$$(\lambda-2)\Big((\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4)-(-1)\cdot 2\Big)=(\lambda-2)^2(\lambda^2-5\lambda+6)=$$

$$(\lambda-2)^2(\lambda-2)(\lambda-3)=(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

לכן הפולינום המינימלי הוא אחד מהבאים:

$$(\lambda-2)^3(\lambda-3)\quad,\quad(\lambda-2)^2(\lambda-3)\quad,\quad(\lambda-2)(\lambda-3)$$

נבדוק: (נציב את A בפולינומים המינימליים)

$$f(A)=(A-2I)(A-3I)=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\neq 0$$

$$g(A) = (A-3I)(A-2I)^2 =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $g(A)$ הפולינום המינימלי של A.