תרגול 4 - הגדרות ותרגילים

מרחבים קומפקטיים

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר ש $A \subseteq X$ קומפקטי אם מתקיימת התכונה הבאה: לכל קבוצה של קבוצות פתוחות $\{O_i\} \subseteq top(X,d)$ שמקיימת, $A \subseteq \bigcup_i O_i$, יש תת קבוצה סופית, $\{O_{i_1},...,O_{i_n}\}$ כך ש $A \subseteq O \cup ... \cup O_{i_n}$. במילים: מרחב קומפקטי הוא מרחב המקיים כי לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.

   (א) דוגמא: אם X מרחב סופי, אז הוא קומפקטי. (לא משנה מה המטריקה עליו)

2. משפט: ב $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיים כי: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטי אמ״מ הוא סגור וחסום.

   (א) למשל הקבוצה $[0,1] \cup [5,15]$ קומפק'.

   (ב) תרגיל: במרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה,

3. תרגיל: כל קבוצה קומפקטית היא חסומה.

4. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ. נאמר ש X חסום כליל אם לכל רדיוס r יש מספר סופי של כדורים $B(x_i,r)$ עם רדיוסים כלשהם $x_i \in X$, שמהווים כיסוי ל X. כלומר, $X \subseteq \bigcup B(x_i,r)$.

5. טענה: כל מרחב קומפקטי הוא חסום כליל. (במילים אחרות: קומפקטיות גוררת חסימות כליל).

6. תרגיל: חסימות כליל היא תורשתית. כלומר, אם (X,d) הוא מרחב חסום כליל, ו$Y \subseteq X$ הוא תת קבוצה של X, אזי (Y,d) (כלומר, מסתכלים על Y כמ"מ עם המטריקה המושרית) הוא מרחב חסום כליל.

7. תרגיל: סגור של חסום כליל הוא חסום כליל. כלומר, אם (X,d) מ"מ ו$A \subseteq X$ היא תת קבוצה חסומה כליל, אז $cl(A)$ גם חסומה כליל.

מרחבים טופולוגים

1. הגדרה: תהי X קבוצה. טופולוגיה על X היא תת קבוצה של $P(X)$ שנסמן בτ, (כלומר $\tau \subseteq P(X)$) (במילים: אוסף של תתי קבוצות של X), שמקיים 3 תכונות:

(א) $X, \emptyset \in \tau$.

(ב) τ סגור לאיחוד כלשהו. כלומר, אם $O_i \in \tau$ לכל i, אז $\bigcup_i O_i \in \tau$.

(ג) τ סגור לחיתוך סופי. כלומר, אם $O_1, ..., O_n \in \tau$, אז $O_1 \cap ... \cap O_n \in \tau$. (שימו לב שזה שקול לדרוש סגירות ליתוך של 2 קבוצות)

2. קבוצה $O \in \tau$ נקראת פתוחה. וקבוצה תקרא סגורה אם המשלים של פתוח. כלומר, C סגורה אם $C^c \in \tau$.

3. דוגמאות:

(א) לכל קבוצה X אפשר לקחת $\tau = P(X)$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית. בטופולוגיה זו כל הקבוצות פתוחות. בפרט, גם כל הקבוצות סגורות.לכל קבוצה X אפשר לקחת את $\tau = \{X, \emptyset\}$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הטריוויאלית. בטופולוגיה זו הקבוצות הפתוחות והסגורות היחידות הן X ו$\emptyset$.

(ב) לכל מרחב מטרי (X, d) ניתן להגדיר את הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה. כלומר, האוסף של כל הקבוצות שפתוחות לפי המטריקה.

(ג) לכל קבוצה X אפשר לקחת את האוסף הבא: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O : |O^c| < \infty\}$ כלומר, הקבוצות הפתוחות הן כל הקבוצות שהמשלים שלהן סופי, והקבוצה הריקה (יתכן שהמשלים שלה אינו סופי). באופן שקול אפשר להגיד שהקבוצות הסגורות הן הקבוצות הסופיות, וX.

i. תרגיל: הטופולוגיה הקוסופית היא אכן טופולוגיה.

4.] ניתן לדלג[הגדרה: יהא a שלם ו d טבעי אזי נגדיר $S_{a,d} = a + d\mathbb{Z}$. נגדיר על השלמים τ כך: קבוצה O היא פתוחה אמ"מ $O = \cup_{(a,d)} S_{a,d}$.

(א) תרגיל: זוהי אכן טופולוגיה

(ב) הערה: $S_{a,d}$ פתוחה

(ג) תרגיל: $S_{a,d}$ סגורה.

5. הגדרה: יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. נאמר שהוא מטרזיבלי אם קיימת מטריקה d על X כך ש$\tau = top(d)$. כלומר הטופולוגיה מושרית מהמטריקה.

(א) דוגמא: הטופולוגיה הדיסקטרית מושרית מהטריקה הדיסקרטית.

(ב) דוגמא: $X = \{a, b\}$ ו $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. הטופולוגיה הנ"ל לא מטריזבילית, כי במטריקה כל נקודון סגור אבל אצלנו $\{a\}$ לא סגור כי $\{a\}^c = \{b\}$ לא פתוח.

(ג) דוגמא: נגדרי טופולוגיה חדשה: ניקח את הקבוצה $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$).
כלומרת לקחנו את הממשיים, והוספנו להם איבר נוסף. ונגדיר: $\tau = \{O : \ p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.

(ד) תרגיל קשה: הטופולוגיה מהסעיף הקודם אינה מטריזבילית.

התכנסות

1. הגדרה: (X,τ) מ״ט . נאמר שסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x ונסמן $x_n \to x$ אם לכל סביבה U של x, כלומר קבוצה פתוחה U כך ש $x \in U$, קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $x_n \in U$.

   (א) דוגמא: סדרה קבועה $x_n = a$ מתכנסת ל $x = a$, בכל טופולוגיה.

   (ב) דוגמא $X = \{a, b\}$ ו $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ אזי הסדרה הקבועה $x_n = a$ לכל n, מקיימת $x_n \to a$ וגם $x_n \to b$ (כי הסביבה היחידה של b היא X..

   (ג) תרגיל: $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$) ונגדיר $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף.

רציפות

1. הגדרה: יהיו $(X,\tau), (Y,\tau')$ מ״ט ו $f : X \to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x \in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U \subseteq f^{-1}(V)$.

   (א) פונקציה $f : X \to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x \in X$. זה שקול לכך ש: תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה . כלומר, לכל $O \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O) \subseteq X$ פתוחה. (כמובן בטופולוגיות המתאימות).

   (ב) דוגמא: כל פונקציה $f : (X, \mathrm{disc}) \to (Y,\tau')$ רציפה. כי בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה פתוחה.

   (ג) כל פונקציה $f : (X,\tau) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ רציפה כי בטופולוגיה הטריוויאלית הקבוצות הפתוחות היחידות הן $\emptyset$ ו Y, ו- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$, ואילן קבוצות שפתוחות בכל טופולוגיה.

   (ד) למשל $id : (X,\tau) \to (X,\tau)$ רציפה.

   (ה) כל פונקציה f רציפה בין מרחבים מטריים, רציפה גם בין הטופולוגיות שמושרות מהם.

2. תרגיל: תהא $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ טופלוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f(x) = 2x$, מצאו באלו נקודות f רציפה .

   (א) תרגיל: מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של פונקציות רציפות $f, g : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R}\tau)$ אינה פונקציה רציפה בהכרח.

3. תרגיל: יהיו $(X,\tau), (Y,\tau')$ מ״ט ו $f : X \to Y$ רציפה. אזי f שומרת על התכנסות. כלומר לכל סדרה: $x_n \to x$ מתקיים: $f(x_n) \to f(x)$

   (א) תרגיל: ההפך לא נכון. תהא $f : X \to Y$ פונקציה ששומרת על התכנסות. אזי ייתכן ש f לא רציפה.