פתרון תרגיל 7

1. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-h\right)-f\left(x\right)\right|dm=0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

2. תהי $f\geq0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int fdm=\infty$. הראו שלכל $M>0$ קיימת פונקציה g כך ש $f\leq g\leq 0$ המקיימת :

i. $\int gdm>M$

ii. g חסומה

iii. לתומך של g מידה סופית.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $g_n\left(x\right)=1_{[-n,n]\cap\{f\leq n\}}\left(x\right)f\left(x\right)$. קל לראות כי לכל $n\in\mathbb{N}$ g_n מקיימת את שני הסעיפים האחרונים. הסעיף הראשון נובע מההתכנסות המונוטונית.

3. תהי $\phi\left(x\right)$ פונקציה המקיימת $\phi\left(x\right)=\phi\left(x+1\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\int_{[0,1]}\phi\left(x\right)dx<\infty$. נגדיר

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון: קל לראות כי $f\left(x\right)$ מחזורית 1, כלומר $f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$. מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f\left(x\right)dm&=\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}dm\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,n]}\frac{\phi\left(x\right)}{n^3}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{\phi\left(x\right)}{n^2}dm<\infty\end{aligned}$$

מכאן נובע כי f סופית כב"מ.