אנליזה מודרנית – תרגול 12 ואחרון

תזכורת: אם $\left(X,\|\ \|_X\right),\left(Y,\|\ \|_Y\right)$ מ"נ, $T:X\to Y$ העתקה לינארית, מגדירים $\|T\|=\sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}:0\neq x\in X\right\}=\sup\left\{\|T(x)\|_Y:\|x\|_X=1\right\}$. (במילים $\|T\|$ הוא גורם המתיחה המקסימלי של T). אם $\|T\|<\infty$ אומרים ש-T חסומה, ומרחב כל ההעתקות הלינאריות החסומות הוא מ"נ יחד עם הנורמה הזו.

תרגיל: תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(x,y)=(-3x,2y)=\begin{pmatrix}-3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. חשבו את $\|T\|$. (הנורמות על $\mathbb{R}^2$ הן האוקלידיות)

פתרון: יש למצוא את $\sup\left\{\|T(x,y)\|:\|(x,y)\|=1\right\}=\sup\left\{\|(-3x,2y)\|:\sqrt{x^2+y^2}=1\right\}$.
לצורך כך נשים לב שקבוצת הנקודות $\left\{(-3x,2y):x^2+y^2=1\right\}$ ממלאת את האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. שכן אם $x^2+y^2=1$ אזי $\frac{(-3x)^2}{9}+\frac{(2y)^2}{4}=1$. וכל נקודה $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ על האליפסה יכולה להיכתב בצורה $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=(3\cos\theta,2\sin\theta)$ כך ש-$\left(\bar{x},\bar{y}\right)=T(-\cos\theta,\sin\theta)$ ו-$(-\cos\theta,\sin\theta)$ נמצאת על מעגל היחידה. אנו מעוניינים בנקודות מהקבוצה $\left\{(-3x,2y):x^2+y^2=1\right\}$ (כלומר מהאליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$) בעלות האורך (נורמה) הגדול ביותר. פשוט לראות שמתקבל מקסימום בנקודות $(\pm3,0)$ וערך המקסימום הוא $\|T\|=3$.

(ניתן להכליל באופן הבא: אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ לינארית ומוגדרת ע"י $T(x)=Ax$, עבור $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית, עם ע"ע $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ אזי $\|T\|=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$. המספר $\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ נקרא הרדיוס הספקטרלי של A ומסומן ע"י $\rho(A)$).

תרגיל: נגדיר $T:C([0,1])\to\mathbb{R}$ ע"י $T[f]=f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.

פתרון: נתחיל מהמקרה שעל $C([0,1])$ מוגדרת הנורמה הרגילה ($\|f\|=\max_{0\le x\le1}|f(x)|$). כדי להוכיח רציפות נסתמך על משפט מההרצאה, ונוכיח כי $\|T\|<\infty$ (כלומר T חסומה). ובכן, לכל f המקיימת $\|f\|=1$ מתקיים $\max_{0\le x\le1}|f(x)|=1$ ולכן $|f(0)|\le1$ או $|T[f]|\le1$. מכאן שכל איברי הקבוצה $\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}$ חסומים מלעיל ע"י אחד, ולכן $\|T\|=\sup\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}\le1<\infty$ כנדרש.

נניח כעת כי על $C\left(\left[0,1\right]\right)$ מוגדרת נורמת L^2 ביחס למידת לבג ($\|f\|=\left(\int_0^1 |f|^2\,dm\right)^{1/2}$) ויש להפריך את הרציפות. דרך מומלצת לעשות זאת היא ע"פ היינה: נמצא סדרת פונקציות $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2 , אבל $T\left[f_n\right]\not\to T\left[0\right]=0$ ב- $\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן $f_n\left(x\right):=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$. נחשב

$$\|f_n-0\|=\left(\int_0^1 |f_n-0|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 |f_n|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^{1/n}\left|1-nx\right|^2 dm\left(x\right)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^{1/n}\left(1-2nx+n^2x^2\right)dm\left(x\right)\right)^{1/2}=\left(x-nx^2+n^2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1/n}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\to 0$$

לכל n $T\left[f_n\right]=f_n\left(0\right)=1$ ולכן $T\left[f_n\right]\to 1\neq 0$.

תזכורת: יהי X מ"ו, מ"פ על X היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון $\langle \alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$
- הרמיטיות $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ ב- $\mathbb{C}$ – או סימטריות $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$ ב- $\mathbb{R}$
- חיוביות $\langle v,v\rangle\ge 0$ עם שוויון $\Leftrightarrow$ $v=0$

נובע: אנטי לינאריות ברכיב השני $\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\overline{\alpha}\langle u,v\rangle+\overline{\beta}\langle u,w\rangle$ (לינאריות ב- $\mathbb{R}$)

תרגיל: הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C\left(\left[a,b\right]\right)$ אינה מושרית מאף מכפלה פנימית.

פתרון: נפריך את זהות המקבילית $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$. בהרצאה הוכח שאם הנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית, אזי זהות המקבילית חייבת להתקיים.

נגדיר $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ע"י ציור [f מתחילה ב-1, ויורדת לינארית עד שמגיעה ל0 באמצע הקטע – ומשם נשארת אפס. g מתחילה ב-0, נשארת 0 עד אמצע הקטע ועולה משם לינארית עד 1]. מתקיים $\|f+g\|^2=\|f-g\|^2=\|f\|^2=\|g\|^2=1$ אם נציב בזהות המקבילית נקבל $1+1=2\left(1+1\right)$ וזה לא נכון.

תרגיל: הוכיחו כי $\langle A,B\rangle:=trace\left(AB^*\right)$ מהווה מכפלה פנימית על מרחב המטריצות המרוכבות $\mathbb{C}^{m\times n}$ (תזכורת: $B^*=\overline{A^T}$)

פתרון: נוכיח את קיום התנאים

- $$\langle \alpha A+\beta B,C\rangle = Trace\left(\left(\alpha A+\beta B\right)C^*\right)=Trace\left(\alpha AC^*+\beta BC^*\right)$$
$$=Trace\left(\alpha AC^*\right)+Trace\left(\beta BC^*\right)=\alpha Trace\left(AC^*\right)+\beta Trace\left(BC^*\right)=\alpha\langle A,C\rangle+\beta\langle B,C\rangle$$

- $$\langle B,A\rangle = Trace\left(BA^*\right)=Trace\left(\left(BA^*\right)^T\right)=\overline{Trace\left(\overline{\left(BA^*\right)^T}\right)}$$
$$=\overline{Trace\left(\overline{A^{*T}B^T}\right)}=\overline{Trace\left(AB^*\right)}=\overline{\langle A,B\rangle}$$

- $$\langle A,A\rangle = Trace\left(AA^*\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(AA^*\right)_{kk}=\sum_{k=1}^{m}R_k\left(A\right)\bullet C_k\left(A^*\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\overline{a_{kl}}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|a_{kl}\right|^2\geq 0$$
ויש שוויון או"א כל אברי המטריצה הם אפס – כלומר אם $A=0$.

בהרצאה הוכחנו שאם $f\geq 0$ מדידה בממ"ח (X,S,μ) אזי $\nu(E):=\int_E fd\mu$ מגדירה מידה חדשה, ובנוסף $\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=0$. נאמר ש- ν רציפה בהחלט ביחס ל- μ ונסמן $\nu<<\mu$. בתרגיל בית 6 הוכחנו בנוסף את השוויון $\int_X gd\nu=\int_X gfd\mu$ מה שמפתה לרשום $f=\frac{d\nu}{d\mu}$. f נקראת נגזרת רדון-ניקודים של ν ביחס ל- μ . משפט רדון-ניקודים אומר שאם עבור מידות σ סופיות μ,ν מתקיים $\nu<<\mu$ אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים $f=\frac{d\nu}{d\mu}$.

תרגיל:

יהי (X,S) מ"מ ותהיינה μ,ν,λ מידות σ -סופיות עליו, המקיימות $\mu<<\lambda,\nu<<\lambda$.אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$ ומתקיים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}$.

פתרון: ניתן ליישם את משפט רדון-ניקודים על היחסים $\mu<<\lambda,\nu<<\lambda$ ולקבל שקיימות $f=\frac{d\mu}{d\lambda},g=\frac{d\nu}{d\lambda}\geq 0$ ומדידות כך ש- $\mu(E)=\int_E fd\lambda,\nu(E)=\int_E gd\lambda$ לכל E מדידה. מכאן:

$$(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)=\int_E fd\lambda+\int_E gd\lambda=\int_E(f+g)d\lambda=\int_E\left(\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}\right)d\lambda$$

כלומר קיימת $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$ ומתקיים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}$.

נסיים את הקורס בהערה: ניתן להוכיח בנוסף זהויות יפות כמו "כלל השרשרת" $\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ וגם $\frac{d\nu}{d\mu}=\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$ תחת דרישות מסויימות.