

פיזיקה למתמטיקאים – 88-320 - מועד ב

מרצים: ד"ר ברוך ברזל, מר ניר שרייבר

משך המבחן: 3 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 5 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.
ניתן לענות, בנוסף על השלוש הנ"ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.

1. גוף שמסתו m מאולץ לנוע במישור (x, y) בשדה כבידה (פוטנציאל $U(x, y) = mgy$) לאורך מסילה $y(x) = ax^n$.
- רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת באמצעות הקואורדינטה x .
 - קבלו את משוואות התנועה (אויילר-לגראנז') של המערכת.
 - פתרו את המשוואות עבור $x(t)$ כאשר $n = 1$.
 - כעת הציבו תנאי התחלה $x(t=0) = 0$ ו- $\dot{x}(t=0) = 0$, וקבלו פתרון מפורש עבור $y(t)$. באיזה גבול מתקבלת נפילה חופשית רגילה?

2. לווין מקיף כוכב תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = -\frac{C}{r}$.
- רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת במונחים של הקואורדינטות הפולאריות r, θ .
 - קבלו את משוואות התנועה (אויילר-לגראנז') של המערכת.
 - הראו כי התנע הזוויתי, דהיינו התנע הצמוד לקואורדינטה θ , נשמר.
 - כעת העזרו בתנע הזוויתי ורשמו את הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת.
 - מהי נקודת שווי המשקל של המערכת?
 - אם נתון כי הלווין מצוי בדיוק בנקודת שיווי המשקל מן הסעיף הקודם – מהי מהירותו הזוויתית?

3. לחלקיק שני מצבים אפשריים (אורתונורמליים): $|0\rangle, |1\rangle$, עם האנרגיות E_0 ו- E_1 בהתאמה.
- הניחו כי שני המצבים הם בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של אופרטור האנרגיה A . כעת רשמו את A במפורש על ידי שימוש בנוטאציה של דיראק (המשפט הספקטרלי).
 - נתונה מערכת במצב $|\psi\rangle = C(|0\rangle + (1+i)|1\rangle)$ מנורמל (יש למצוא את C). מצאו את התפלגות האנרגיה $P(A=a)$ של המערכת? מהי תוחלת האנרגיה $\langle A \rangle$?
 - נגדיר את האופרטור $B = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$. הראו כי $|\varphi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \pm |0\rangle)$ הם מצבים עצמיים של B .
 - מהם תוצאות המדידה האפשריות ומהי ההסתברות לכל אחת מהן כאשר מפעילים את B על $|\psi\rangle$?

4. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

א. הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה על ידי

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle$$

(רמז: משוואת שרדינגר עבור $\langle \psi |$ היא $\langle \psi | H^\dagger = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi |$)

ב. השתמשו בתוצאות סעיף א' כדי להוכיח את משפט ארנסט, שלפיו ערכי התצפית של אופרטורי התנע והמיקום מקיימים את חוקי המכניקה הקלאסית, דהיינו:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p \rangle$$

ג. עבור אוסצילטור הרמוני קוואנטי עם פוטנציאל $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ הראו כי התוחלת של אופרטור המיקום נעה על פי המשוואה הקלאסית

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\omega^2\langle x \rangle$$

שאלת בונים

5. נהג מרוץ שמסתו m נוהג במכונית שתנועתה נתונה על ידי

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

מהו הכוח המדומה $F(t)$ הפועל על הנהג? מתקרת המכונית תלויה מטוטלת - מצאו את זווית ההטיה שלה $\theta(t)$ (כאשר פועלת כבידה עם תאוצה g).

