אינפי 1 – פתרון תרגיל 9

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו כי לא קיימים הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$

<u>פתרון</u>

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, מצד שני:

אם $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ אזי $\cos x$ הוא חיובי ושואף לאפס כאשר $x \to \dfrac{\pi}{2}^{-}$

אם $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ אזי $\cos x$ הוא שלילי ושואף לאפס כאשר $x \to \dfrac{\pi}{2}^{+}$

לכן, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} \tan x = \infty$. מכאן, הגבול $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ אינו קיים.

ב. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^3}{\sin^3 x}$

<u>פתרון</u>

מתקיים

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\sin^3 x} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1\cdot\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{\sin^3 x} \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

ג. $\lim\limits_{x\to a} [x]$ לכל $a \in \mathbb{Z}$

<u>פתרון:</u>

$$\lim_{x\to a^+} [x] = a$$

$$\lim_{x\to a^-} [x] = a-1$$

שכן, לכל $a < x < a+1$ מתקיים $[x] = a$, ולכל $a-1 < x < a$ מתקיים $[x] = a-1$. לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \neq a-1$ ולכן הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול לא קיים.

מש"ל

<u>תרגיל 2:</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$

<u>פתרון</u>

לכל $x > 1$ מתקיים $0 < \frac{1}{x} < 1$ ומכאן $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$. לכן, לכל $x > 1$ מתקיים $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 0$. לכן $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

ב. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$

<u>פתרון</u>

הגבול לא קיים. נראה זאת באמצעות גבולות חד צדדיים.

במקרה של $x > 0$ נבצע הצבה: $\left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{y} & \Leftrightarrow & y = \frac{1}{x} \\ x \to 0^+ & \Rightarrow & y \to \infty \end{matrix}\right\}$ ונקבל:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} y \left[\frac{1}{y}\right] = 0$ (השוויון האחרון נובע מסעיף ב').

מאידך, אם $x < 0$ ושואף לאפס משמאל, בסביבה שמאלית מנוקבת של אפס: $(-1,0)$נקבל: $[x] = -1$. כלומר: $\frac{[x]}{x} = \frac{-1}{x}$ וכאשר $x \to 0^-$ מתקיים $\frac{-1}{x} \to \infty$.

מש"ל