אנליזה מודרנית 1 – תשע"ה
פתרונות מועד ב'

שימו לב, לכל שאלה יש דרכים שונות לפתרון, והפתרונות המוצעים להלן הן רק אפשרות אחת.

1. יהי X מרחב מידה, ותהי $\{A_n\}$ סדרה של קבוצות מדידות המקיימת $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$.
   תהי B קבוצת כל ה x-ים ב X הנמצאים באינסוף קבוצות A_n.
   הראה ש B מדידה ו $\mu(B)=0$.

נסמן $B_n=\bigcup_{k\geq n}A_k$, אזי B_n מדידה כאיחוד בן מניה של קבוצות מדידות. נראה ש $B=\bigcap_{n\geq 1}B_n$ ולכן מדידה כחתוך בן מניה של קבוצות מדידות. אכן, $x\in B$ אם"ם x מופיע באינסוף A_k ים אם"ם לכל n יש $k\geq n$ כך ש $x\in A_k$ אם"ם לכל n, $x\in B_n$ אם"ם $x\in\bigcap_{n\geq 1}B_n$.

כעת נראה ש $\mu(B)=0$. $\mu(B_n)=\mu(\bigcup_{k\geq n}A_k)\leq\sum_{k\geq n}\mu(A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ כי זהו זנב של טור מתכנס. קבלנו אם כן ש $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=0$. כעת B_n היא סדרה **יורדת** של קבוצות מ**מידה סופית** לכן $\mu(B)=\mu(\bigcap_{n\geq 1}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=0$.

---

2. חשב את $\int_{\mathbb{R}}x^2d\mu$ כאשר μ היא מידת סטילטיס על $\mathbb{R}$ הנקבעת ע"י הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\leq x<1\\ 2 & 1\leq x\end{cases}$$

לכל $a<b\leq 0$ מתקיים $f(b)-f(a)=0$ לכן $\mu((a,b])=0$ ולכן לכל $A\subseteq(-\infty,0]$ מתקיים $\mu(A)=0$ ולכן $\int_{(-\infty,0]}x^2d\mu=0$. באופן דומה לכל $1\leq a<b$ מתקיים $f(b)-f(a)=0$ לכן $\mu((a,b])=0$ ולכן לכל $A\subseteq(1,\infty)$ מתקיים $\mu(A)=0$ ולכן $\int_{(1,\infty)}x^2d\mu=0$.

לכל $0 \le a < b < 1$ מתקיים $f(b) - f(a) = b - a$ לכן $\mu((a,b]) = b - a$ ולכן על $(0,1)$

μ היא מידת לבג ולכן $\int\limits_{(0,1)} x^2 d\mu = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. לפונקציה f יש קפיצה של 1 בנקודה 1 לכן

$\mu(\{1\}) = 1$ ולכן $\int\limits_{\{1\}} x^2 d\mu = 1^2 \mu(\{1\}) = 1$. ביחד נקבל

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 d\mu = \int\limits_{(-\infty,0]} x^2 d\mu + \int\limits_{(0,1)} x^2 d\mu + \int\limits_{\{1\}} x^2 d\mu + \int\limits_{(1,\infty)} x^2 d\mu = 0 + \frac{1}{3} + 1 + 0 = \frac{4}{3}$$

---

3. יהי X מרחב מידה, ותהי $f \in L^p(X)$ עם $\|f\|_p = 1$.

עבור $t > 0$ נגדיר את הקבוצה $A = \left\{ x \in X \ : \ |f(x)| > t \right\}$. הראה ש $\mu(A) \le \frac{1}{t^p}$.

$\|f\|_p^{\ p} = 1$ כלומר $\int\limits_X |f|^p d\mu = 1$. מהגדרת A מתקיים $|f| \ge t \cdot 1_A$ לכן $|f|^p \ge t^p \cdot 1_A$ לכן

$1 = \int\limits_X |f|^p d\mu \ge \int\limits_X t^p \cdot 1_A d\mu = t^p \mu(A)$ וקבלנו $\mu(A) \le \frac{1}{t^p}$.

---

4. תהי $f \in L^2(\mathbb{R})$, המקיימת $|f(x)| < 1$ כמעט בכל מקום.

חשב את $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)^{2n} \sin^2 nx \, dm$ (m מידת לבג).

$f \in L^2(\mathbb{R})$ פרושו $\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 dm < \infty$. כיון ש $|f(x)| < 1$ ו $|\sin^2 nx| \le 1$ נקבל שלכל x

$f(x)^{2n} \sin^2 nx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ וכן $|f(x)^{2n} \sin^2 nx| \le |f(x)|^2$. לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)^{2n} \sin^2 nx \, dm = 0$$

---

5. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ נתונה ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\frac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הראה ש f איננה בעלת השתנות חסומה.

בהנתן n נביט בחלוקה הבאה של הקטע $[0,1]$: $1 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2\pi} < \cdots\cdots < \frac{1}{(n-1)\pi} < \frac{1}{n\pi} < 0$.

ע"י השמטת הקטע הראשון והאחרון בחלוקה נקבל ש

$$V_{[0,1]}(f) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k\pi}(-1)^k - \frac{1}{(k+1)\pi}(-1)^{k+1} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

וזה נכון לכל n. אך הטור ההרמוני מתבדר, לכן הביטויים $\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ אינם חסומים, ולכן f איננה בעלת השתנות חסומה.
