קבע בסיס ומימד של החיתוך של תתי המרחבים:

1. תתי מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$W = \{p'(0) = 0\}$$

$$U = \{p(0) + p(1) = 0\}$$

2. תתי מרחב של $\mathbb{F}^{2x2}$:

$$\mathrm{W} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U = \{A \in \mathbb{F}^{2x2} \mid trA = 0\}$$

פתרון:

1. פולינום כללי ב$\mathbb{R}_3[x]$ הוא מהצורה: $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

נראה מתי $p(x) \in W \cap U$:

$p(x) \in W$ ולכן $b = 0 \qquad (*)$

$p(x) \in U$ ולכן $2a + b + c + d = 0 \qquad (**)$

נפתור את מע' המשוואות (*)+(**): $a = t\ ,\ b = 0\ ,\ c = k\ ,\ d = -2t - k$

ולכן פולינום כללי בחיתוך הוא מהצורה $t + kx^2 - (2t + k)x^3 = t(1 - 2x^3) + k(x^2 - x^3)$

ולכן בסיס הוא $\{1 - 2x^3, x^2 - x^3\}$ והמימד הוא 2.

(אגב, מומלץ לבדוק אם וקטורי הבסיס שקיבלתם אכן שייכים ל2 תתי המרחבים הנתונים)

2. ניקח מטריצה כללית $\mathrm{A} \in \mathbb{F}^{2x2}$ ונראה מתי היא בחיתוך:

$A \in W$ ולכן $\exists a, b \in \mathbb{F}:\ A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$A \in U$ ולכן $a + b = 0$

סה"כ $A = \begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ולכן בסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 1