טור טיילור ופיתוח פונקציות אלמנטריות

25 במאי 2014

משפט תהא $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים אז מתקיימים פיתוחי טיילור (מסדר n) הבאים:

פיתוח עם שארית לגרנז'

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c נקודה בין x ל־ x_0 .

במקרה ש $x_0=0$ הפיתוח נקרא טור מקלורן והוא נראה:

פיתוח עם שארית לגרנז'

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

דוגמא־ נפתח את $f(x)=x+\sin(x)$ לטור טיילור עם שארית פיאנו מסדר 2 סביב $x_0=\pi$
פתרון: $f'(x)=1+\cos(x), f^{(2)}(x)=-\sin(x)$ ולכן

$$f(x)=f(\pi)+\frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi)+\frac{f^{(2)}(\pi)}{2!}(x-\pi)^2+o((x-x_0)^2), x\to\pi$$

$$f(x) = \pi + o((x-x_0)^2), x \to \pi$$

דוגמא: השתמש בפיתוח טיילור מסדר ראשון (קירוב לינארי) על מנת לחשב את $\sqrt[3]{1006}$ והערך את השגיאה.

פתרון נגדיר $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ונרצה להציב $x = 1006$ נפתח את $f(x)$ סביב $x_0 = 1000$ ולכן $f^{(1)}(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, f^{(2)}(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$

$$f(x) = f(1000) + f^{(1)}(1000)(x-1000) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-1000)^2$$

$$f(x) = 10 + \frac{1}{3 \cdot 100}(x-1000) - \frac{1}{9}c^{-5/3}(x-1000)^2$$

כאשר c בין 1000ל־x . נציב $x = 1006$ ונקבל

$$\sqrt[3]{1006} \approx 10 + \frac{6}{300}$$

עם שגיאה לכל היותר

$$\frac{1}{9}1006^{-5/3}(6)^2| \leq |-\frac{1}{9}c^{-5/3}(6)^2| \leq \frac{1}{9}1000^{-5/3}(6)^2| = \frac{4}{10^5}$$

משפט: אם לפונקציה יש פיתוח לטור טיילור אז הוא נקבע ביחידות. כלומר אם

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

אז המקדמים נקבעים ביחידות והם שווים ל - $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

דוגמא: מצא את $(e^{x^2})^{(m)}(0)$

פתרון: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ולכן $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ מיחידות הטור נקבל שזהו אכן טור טיילור של e^{x^2} ולכן $\frac{(e^{x^2})^{(m)}(0)}{m!}$ שווה למקדם ה m ־י בטור.

ולכן עבור m אי זוגי נקבל כי $(e^{x^2})^{(m)}(0) = 0$ עבור $m = 2n$ זוגי נקבל כי (שימו לב שהמקדם של x^{2n} הוא $\frac{1}{n!}$)

$$\frac{(e^{x^2})^{(m)}(0)}{m!} = \frac{(e^{x^2})^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{1}{n!}$$

ולכן

$$(e^{x^2})^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

משפט אם $f(x)$ גזירה מכל סדר בקטע $[-r,r]$ ומתקיים שם כי $|f^{(k)}(x)| \leq M$ החל מ k מסוים אז $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (הפונקציה שווה לפיתוח טיילור שלה)

דוגמא: $|\sin^{(k)}(x)| \leq 1$ ולכן $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

דוגמא: $|\cos^{(k)}(x)| \leq 1$ ולכן $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

פיתוח פונקציות לטור טיילור

הגדרה: נאמר שהפונקציה f, המוגדרת בתחום A, ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב הנקודה $x = x_0$ אם קיים טור חזקות סביב $x = x_0$ המתכנס ל־f בתחום A.

משפט: תנאי הכרחי לפיתוח פונקציה f לטור חזקות בתחום A הוא ש־f גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה ב־A.

משפט טיילור: תהי f פונקציה הגזירה אינסוף פעמים בתחום A. תהי $x_0 \in A$ ולכל n שלם נגדיר את השארית

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

אז מתקיים השוויון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ בתחום A אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ לכל $x \in A$.

דוגמא: פתחו את $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ לטור טיילור סביב $x = 0$ וחשבו את $f^{(12)}(0)$.

פתרון: נשתמש בנוסחא של טור הנדסי

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \quad (|x| < 1).$$

ממשפט טיילור נקבל ש־$\frac{f^{12}(0)}{12!}$ הוא המקדם של x^{12} בטור שהוא -1. לכן $f^{12}(0) = -12!$.

דוגמא: פתחו את $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$ לטור טיילור סביב $x=-1$.

פתרון:

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\quad\left(|x+1|<\sqrt{2}\right)$$

דוגמא: פתחו את $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ לטור טיילור סביב $x=0$ וחשבו $f^{(9)}(0)$.

פתרון: נתבונן בנגזרת של הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ \ (|x|<1).$$

לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$:

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

כיוון ש-$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=f(0)$ נקבל

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1)$$

כיוון שהמקדם של x^9 בפיתוח הוא $\frac{1}{9}$ נובע ש- $\frac{1}{9}=\frac{f^{(9)}(0)}{9!}$ ולכן $f^{(9)}(0)=\frac{9!}{9}=8!$.

דוגמא: פתחו את $f(x)=\cos(x)$ לטור טיילור סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

פתרון: נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ ונקבל

$$\cos(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \quad (|x| < \infty)$$

תרגיל: חשב בקירוב של אלפית את הביטוי: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

פתרון: כיוון שלא קיימת ל- $\frac{\sin x}{x}$ פונקציה קדומה אלמנטארית, כדאי לפתח את $\frac{\sin x}{x}$ לטור חזקות ואז לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \right] dx$$

כיוון שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא אינסוף, אז הוא מתכנס במ"ש בכל קטע סופי, ולכן ניתן להחליף את סדר האינטגרל והסכום ולקבל:

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} dx \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} = 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - ...... + r_n(x)$$

כעת יש לקחת מספיק איברים כך שהשארית תהיה קטנה בערכה המוחלט מהדיוק המבוקש.

במקרה שלנו זהו טור לייבניץ שלגביו מתקיים: $\forall n: \quad |r_n| = |S_n - S| \le a_{n+1}$.

נדרוש: $|r_n| \le \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)} < \frac{1}{1000}$.

עבור $n = 2$ נקבל את הדיוק הדרוש: $1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} \approx 0.946$.