תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

23 במרץ 2022

לינארית

1. מה ההצגה הפולרית של המספרים המרוכבים הבאים:

(א) 8

פתרון: $8\text{cis}0$. למה? 8 רחוק מראשית הצירים 8 והזווית היא 0.

(ב) -8

פתרון: $8\text{cis}\left(\pi\right)$(או $8\text{cis}\left(180^{\circ}\right)$) שימו לב ש $-8=-8\text{cis}(0)$ אבל זוהי אינה ההצגה הפולרית שלו. כיוון שבהצגה $r\text{cis}(\theta)$ דורשים ש $0\le r$ ו $0\le\theta<2\pi$.

(ג) $1+2i$

פתרון: $r\text{cis}\left(\theta\right)$ כאשר $r=\sqrt{1^{2}+2^{2}}=\sqrt{5}$ ו $\tan\left(\theta\right)=\frac{2}{1}=2$

$$\theta\approx63.43^{\circ}$$

כלומר

$$1+2i=\sqrt{5}\text{cis}\left(63.43^{\circ}\right)$$

(ד) $-1-2i$

פתרון: $r\text{cis}\left(\theta\right)$ כאשר $r=\sqrt{\left(-1\right)^{2}+\left(-2\right)^{2}}=\sqrt{5}$ ו $\tan\left(\theta\right)=\frac{-2}{-1}=2$ ו

$$\theta\approx63.43^{\circ}+180^{\circ}$$

כיוון ש $-1-2i$ נמצא ברביע השלישי. שימו לב: המחזוריות של $\tan$היא 180 מעלות.

2. יהא $z=r\text{cis}(\theta)$ מספר מרוכב בהצגה פולרית. הביעו את המספרים הבאים בעזרת r ו θ:

(א) $|z|$

פתרון: $|z|=r$

(ב) z^{2}

פתרון: לפי משפט דה-מואבר נקבל

$$\left(r\text{cis}\left(\theta\right)\right)^{2}=r^{2}\text{cis}\left(2\theta\right)$$

באופן דומה

$$\left(r\text{cis}\left(\theta\right)\right)^{10}=r^{10}\text{cis}\left(10\theta\right)$$

(ג) $-z$

פתרון: המרחק מראשית הצירים נשאר ואילו לזווית מתווסף 180° ולכן

$$-z=r\text{cis}\left(\theta+\pi\right)$$

3. (סיום שאלת חורף 2022 נבצרים) ראינו שני מקומות גאומטריים

$$x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$$

$$x^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=3$$

והשאלה היא: הישר $y=x$ נחתך עם המקומות הנל בשני מקומות, פרט לראשית הצירים, שמתאימים למספרים המרוכבים w_1,w_2. פתרו את

$$z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}$$

פתרון: ראשית נמצא את w_1,w_2: נציב $y=x$ בכל אחד מהמעגלים: במעגל הראשון נקבל

$$x^2+\left(x-\sqrt{3}\right)^2=3$$

ואחרי פתיחת סוגריים

$$x^2+x^2-2\sqrt{3}x+3=3$$

או

$$2x\left(x-\sqrt{3}\right)=0$$

ולכן $x=0,\sqrt{3}$ ונקודות החיתוך הן $(0,0),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ ולכן $w_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$. באופן דומה במעגל השני נקבל כי

$$w_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$$

נחזור למשוואה

$$z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}$$

ונחשב מפורשות את צד ימין

$$w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}=|w_1|^2\cdot|w_2|^2=|w_1|^2\cdot|-w_1|^2=|w_1|^2\cdot|w_1|^2=$$

$$=\left(|w_1|^2\right)^2=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=6^2=36$$

כלומר צריך לפתור $z^3=36$. נשתמש בהצגה פולרית: נסמן $z=r\text{cis}\left(\theta\right)$ הצגה פולרית של z. ו $36=36\text{cis}\left(0\right)$. לפי דה מואבר

$$z^3=r^3\text{cis}\left(3\theta\right)$$

ולכן צריך לפתור את המשוואה

$$r^3\text{cis}\left(3\theta\right)=36\cdot\text{cis}\left(0\right)$$

נקבל:

$$\left[r^3=36\right]\Rightarrow\left[r=\sqrt[3]{36}\right]$$

ומכיוון cis מחזורית 2π (כלומר כל הוספת כפולה שלמה של 2π משאירה אותו ערך ב cis) נקבל ש

$$\left[3\theta=0+2\pi k\right]\Rightarrow\left[\theta=\frac{0+2\pi k}{3}\right]$$

וקיבלנו את הפתרונות הבאים:

$$\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right),\ \sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right),\ \sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right),\ \sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 3}{3}\right),\ldots$$

אבל כמה פתרונות שונים? 3 שהם

$$\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right),\ \sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right),\ \sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)$$

שימו לב ש

$$\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 3}{3}\right)=\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(2\pi\right)=\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(0\right)=\sqrt[3]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)$$

וקל לראות שהפתרונות הנ"ל שונים כי יש להם זווית שונה בין 0 ל 2π

(א) מצאו את הסכום של כל הפתרונות (המרוכבים) של המשוואה $z^n=36$ (לכל $n>1$).

פתרון: בדומה למה שראינו, נקבל את המשוואה בהצגה פולרית

$$r^n\text{cis}\left(n\theta\right)=36\text{cis}\left(0\right)$$

שהפתרונות שלה הם:

$$\sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right),\ \sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right),\ \sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{n}\right),\ldots,\ \sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

כלומר $\sqrt[n]{36}\cdot\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot k}{n}\right)$ עבור $0\le k\le n-1$ (שימו לב שעבור $k=n$ נקבל

$$\sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot n}{n}\right)=\sqrt[n]{36}\text{cis}\left(2\pi\right)=\sqrt[n]{36}\text{cis}\left(0\right)=\sqrt[n]{36}\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)$$

ומקבלים חזרתיות בפתרונות). לפי דה מואבר

$$\sqrt[n]{36}\cdot\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot k}{n}\right)=\sqrt[n]{36}\cdot\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)=\sqrt[n]{36}\cdot\left[\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k$$

(שימו לב: דה מואבר אומר ש $\text{cis}(k\theta)=\left[\text{cis}\left(\theta\right)\right]^k$, למשל $\text{cis}(10\theta)=\left[\text{cis}\left(\theta\right)\right]^{10}$).

נסמן $q=\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ונקבל שהפתרונות הם $\sqrt[n]{36}\cdot q^k$ עבור $0\le k\le n-1$. ולכן הסכום הוא :

$$\sqrt[n]{36}\cdot q^0+\sqrt[n]{36}\cdot q^1+\sqrt[n]{36}\cdot q^2+\cdots+\sqrt[n]{36}\cdot q^{n-1}=$$
$$\sqrt[n]{36}\cdot\left(q^0+q^1+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$$

ונשים לב ש $q^0+q^1+q^2+\cdots+q^{n-1}$ הוא סכום של סדרה הנדסית והסכום הזה מחושב

$$q^0+q^1+q^2+\cdots+q^{n-1}=q^0\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\frac{q^n-1}{q-1}$$

לכן, קיבלנו שסכום כל הפתרונות שווה ל

$$\sqrt[n]{36}\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\sqrt[n]{36}\cdot\left(\frac{\left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n-1}{\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1}\right)$$

ושוב, לפי דה מואבר, כיוון ש $\left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n=\left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\right)=\text{cis}\left(2\pi\right)=1$, נקבל שהסכום שווה ל

$$\sqrt[n]{36}\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\sqrt[n]{36}\cdot\left(\frac{1-1}{\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1}\right)=0$$

4. באופן יחסית דומה - אפשר לחשב את

$$\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+\cdots+\sin(n)$$

שימו לב

$$\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+\cdots+\sin(n)=\operatorname{Im}\left(\operatorname{cis}(0)+\operatorname{cis}(1)+\operatorname{cis}(2)+\cdots+\operatorname{cis}(n)\right)$$

מוזמנים, מי שרוצה, להמשיך לפתור את התרגיל (כאשר $\operatorname{Im}(a+bi)=b$ החלק המדומה של מספר מרוכב).

חדוא

1. הוכיחו כי

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{\left(x^2-x\right)}\mathrm{dx}\le 2e^2$$

פתרון: הפונקציה $e^{\left(x^2-x\right)}$ חיובית (אפילו e^x חיובית). בנוסף, נמצא את הערך המקסימאלי שלה M והערך המינאלי שלה m (בקטע $[0,2]$) ונקבל ש

$$m(2-0)\le\int_0^2 e^{\left(x^2-x\right)}\mathrm{dx}\le M(2-0)$$

שימו לב שהפונקציה שלנו רציפה ולכן בקטע הסגור $[0,2]$ אכן יש לה ערך מקס' ומינ'.
נשים לב - הפונקציה e^x היא פונקציה עולה ולכן נחפש את הערך המינמאלי והמקס' של x^2-x (החזקה בשאלה) בקטע $[0,2]$ ואז נעלה ב $e^?$. טוב, נגדיר $f(x)=x^2-x$ ואז

$$f'(x)=2x-1$$

שמתאפס רק ב $x=0.5$. וקל לוודא ששמה מתקבל מינ' שערכו $f(0.5)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$. נציב את הקצוות בשביל למצוא את הערך המקס' שהוא

$$\max\left\{f(0),f(2)\right\}=\max\left\{0,2^2-2\right\}=2$$

ולכן הערכים המקס' והמינ' (בקטע $[0,2]$) של $e^{f(x)}$ הן $e^{-\frac{1}{4}},e^2$. ביחד עם מה שעשינו קודם נקבל ש

$$2\cdot e^{-\frac{1}{4}}=m(2-0)\le\int_0^2 e^{\left(x^2-x\right)}\mathrm{dx}\le M(2-0)=2\cdot e^2$$

כמו שרצינו (כן? $e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$).

2. חשבו את הפונקציות הקדומות לפונקציות הבאות (כלומר, אינטגרל לא מסוים):

(א) $\int e^{-x}\mathrm{dx}$
פתרון: $\int e^{-x}\mathrm{dx}=-e^{-x}+C$ (גזירה ישירה, $\left(-e^{-x}\right)'=-\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}$).
(ב) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{dx}$
פתרון:

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{dx}=\int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{dx}=\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=3x^{\frac{1}{3}}+C=3\cdot\sqrt[3]{x}+C$$

(ג) $\int x\cdot e^{-x}\text{dx}$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים ($\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f^{'}\cdot g$):

$$\int x\cdot e^{-x}\text{dx} = \left[\begin{array}{cc} f=x & f^{'}=1 \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x}\end{array}\right] = x\left(-e^{-x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)\text{dx} =$$

$$= -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\text{dx} = -x\cdot e^{-x} + -e^{-x} + C = -e^{-x}\left(x+1\right) + C$$

ננסה לעשות בדרך נוספת:

$$\int x\cdot e^{-x}\text{dx} = \left[\begin{array}{cc} f=e^{-x} & f^{'}=-e^{-x} \\ g'=x & g=\frac{x^2}{2}\end{array}\right] = \frac{x^2}{2}e^{-x} - \int\frac{x^2}{2}\left(-e^{-x}\right)\text{dx}$$

ונראה שרק הסתבכנו עם האינטגרל $\int\frac{x^2}{2}\left(-e^{-x}\right)\text{dx}$.

(ד) $\int x\cdot\cos(x)\text{dx}$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int x\cdot\cos(x)\text{dx} = \left[\begin{array}{cc} f=x & f^{'}=1 \\ g'=\cos(x) & g=\sin(x)\end{array}\right] = x\cdot\sin(x) - \int\sin(x)\text{dx} =$$

$$= x\cdot\sin(x) - (-\cos(x)) + C = x\cdot\sin(x) + \cos(x) + C$$

(ה) $\int\ln(1+x)\text{dx}$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים כאשר נציג $\int\ln(1+x)\text{dx} = \int 1\cdot\ln(1+x)\text{dx}$ ואז

$$\int\ln(1+x)\text{dx} = \left[\begin{array}{cc} g=\ln(1+x) & g'=\frac{1}{1+x} \\ f^{'}=1 & f=x\end{array}\right] = x\cdot\ln(1+x) - \int\frac{x}{1+x}\text{dx}$$

נטפל ב $\int\frac{x}{1+x}\text{dx}$ בנפרד:

$$\int\frac{x}{1+x}\text{dx} = \int\frac{x+1-1}{1+x}\text{dx} = \int 1 + \frac{-1}{1+x}\text{dx} = \int 1\text{dx} - \int\frac{1}{1+x}\text{dx} = x - \ln|1+x| + C$$

לסיכום, קיבלנו

$$\int\ln(1+x)\text{dx} = x\cdot\ln(1+x) - \int\frac{x}{1+x}\text{dx} = x\cdot\ln(1+x) - (x - \ln|1+x|) + C =$$

$$x\cdot\ln(1+x) - x + \ln|1+x| + C$$

i. מה הקטע של הערך המוחלט בשיוויון $\int\frac{1}{x}\text{dx} = \ln|x|$? אנחנו רוצים את הערך המוחלט כדי של $\frac{1}{x}$ ול $\ln|x|$ יהיה אותו תחום הגדרה ($x\neq 0$). אבל למה זה נכון? נגזור ונראה שאכן זה כך: לכל x חיובי, ידוע ש

$$[\ln|x|]' = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

ונרצה להוכיח שזה מתקיים גם עבור xים שליליים. לצורך כך נסתכל ב x שלילי ונרצה להוכיח כי

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$$

אז **עבור** x **שלילי** נקבל ש $\ln|x| = \ln(-x)$ (ומכיוון ש $-x$ **חיובי** אז בכלל מוגדר $\ln(-x)$) וכעת נוכל לגזור לפי כלל השרשרת:

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

(ו) $\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים ונגיע למצב של "חזרה למקורות":

$$\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}=\left[\begin{array}{cc} g=\cos(x) & g'=-\sin(x)\\ f^{'}=e^x & f=e^x\end{array}\right]=e^x\cos(x)-\int -e^x\sin(x)\mathrm{dx}=$$

$$=e^x\cos(x)+\int e^x\sin(x)\mathrm{dx}$$

ונטפל ב $\int e^x\sin(x)\mathrm{dx}$ בנפרד:

$$\int e^x\sin(x)\mathrm{dx}=\left[\begin{array}{cc} g=\sin(x) & g'=\cos(x)\\ f^{'}=e^x & f=e^x\end{array}\right]=e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}$$

כעת, נסמן $I=\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}$ וקיבלנו

$$I=\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}=e^x\cos(x)+\int e^x\sin(x)=$$

$$=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I$$

כלומר קיבלנו $I=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I$ או

$$2I=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)$$

ולבסוף

$$I=\frac{e^x\cos(x)+e^x\sin(x)}{2}+C$$

(אנחנו מוסיפים את C כי שני ה I ים בשיוויון נבדלים בקבוע שמתעלמים ממנו עד השלב הסופי).

i. הערה: את החישוב ה"פנימי" יכלנו לעשות כך (להגדיר את $g,f^{'}$

$$\int e^x\sin(x)\mathrm{dx}=\left[\begin{array}{cc} g=e^x & g'=e^x\\ f^{'}=\sin(x) & f=-\cos(x)\end{array}\right]=-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}&=e^x\cos(x)+\int e^x\sin(x)\mathrm{dx}=\\&=e^x\cos(x)+\left(-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}\right)=\\&=\int e^x\cos(x)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

שלא עוזר לנו...