תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

11 במאי 2022

חדוא

1. האם האינטגרלים הבאים מתכנסים.

(א) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{dx}$

פתרון: הפונקציות $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}$ חיוביות בקטע $[1,\infty)$ ומתקיים ש

$$0 \le \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \le \frac{1}{x^2}$$

ומכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{dx}$ מתכנס (משפט) אז נקבל שגם האינטגרל שלנו מתכנס.

(ב) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$

פתרון: ננסה להשוות עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (גם היא וגם הפונקציה שלנו חיוביות בקטע)

$$\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{1+\sqrt{x}} \xrightarrow{(x\to\infty)} \infty$$

קיבלנו ש $\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ גדולה (באופן גבולי) מ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ בקטע $[1,\infty)$ מכיוון ש $\frac{1}{\sqrt{x}}$ מתבדר בקטע זה גם האינטגרל שלנו.

(ג) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$

פתרון: הנקודה הבעייתי היא 0. ננסה להשוות עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (גם היא וגם הפונקציה שלנו חיוביות בקטע)

$$\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{1+\sqrt{x}} \xrightarrow{\left(x\to 0^+\right)} 1$$

וקיבלנו שהאינטגרל שלנו "חבר" של האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$ שידוע שמתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו.

(ד) $\int_1^\infty \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\mathrm{dx}$

פתרון: נתעלם כרגע מה 1 במכנה (נצדיק אח"כ) ונשאל האם האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{dx} = \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{dx}$$

מתכנס או לא. ננסה להשוות עם $\frac{1}{x}$. בעצם לא צריך לעשות גבול כי

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

ו $\frac{1}{x}$ מתבדר בקטע $[1,\infty)$ ולכן זה לא עוזר לנו.
ננסה להשוות עם $\frac{1}{x^2}$ (שמתכנס בקטע $[1,\infty)$):

$$\frac{\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

מה הגבול כאשר $x\to\infty$?

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$$

ולכן האניטגרל של $\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ חבר של $\frac{1}{x^2}$ ולכן מתכנס. נשאר לפתור את התרגיל שלנו.. למה זה קל? כי נשווה:

$$\frac{\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}}{\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$

ולכן האינטגרל בשאלה חבר של $\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ שחבר של $\frac{1}{x^2}$ ולכן מתכנס. דרך נוספת לסיים את התרגיל היא להגיד פשוט ש

$$\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} \leq \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

וראינו שהגדול מתכנס ולכן גם שלנו.

(ה) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{|\ln(x)|}}\mathrm{dx}$

פתרון: שהנקודה הבעייתית היא 1. ננסה להשוות ל $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\frac{1}{x\sqrt{|\ln(x)|}}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}} \xrightarrow{x\to 1^-} \infty$$

ולכן $\frac{1}{x\sqrt{|\ln(x)|}}$ גדולה יותר (באופן גבולי) מ $\frac{1}{x}$ וברור ש $\frac{1}{x}$ מתכנס בקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (זהו פשוט אינטגל רגיל). אבל זה לא עוזר לנו.
נתחיל "בלנפות רעשים". כמו שרואים החלק של ln גורם לאינטגל להיות לא אמיתי אז בואו נטאטא את שאר הגורמים.
איך נעשה זאת? פשוט - השוואה

$$\frac{\frac{1}{x\sqrt{|\ln(x)|}}}{\frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 1^-} 1$$

ולכן האינטגרל שלנו חבר של האינטגל $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}\mathrm{dx}$. בקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ העלה בריבוע גורמת לאי-השיוויון

$$\frac{1}{|\ln(x)|} \geq \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}$$

כי $|\ln(x)| \leq 1$ ולכן גם $\sqrt{|\ln(x)|} \leq 1$ ולכן $0 \leq \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}} \geq 1$. לכן: אם נצליח להראות ש $\frac{1}{|\ln(x)|}$ מתכנס פתרנו את השאלה ויופי לנו. אם נראה שהוא מתבדר - זה לא עוזר לנו. ואם לא נצליח לדעת אם הוא מתכנס או מתבדר - זה בטח לא עוזר. בקטע $[\frac{1}{2}, 1]$ מה הסימן של $\ln(x)$? שלילי (או אפס) ולכן

$$|\ln(x)| = -\ln(x)$$

וחוזרת השאלה האם האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{1}{\ln(x)}\mathrm{dx}$ מתכנס או לא? ננסה להשוות עם $\frac{1}{1-x}$:

$$\lim_{x\to1^-} \frac{-\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{\ln(x)} = \{\text{לופיטל}\} = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

ולכן $\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{1}{\ln(x)}\mathrm{dx}$ ו $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$ חברים. נמצא קדומה

$$\int \frac{1}{1-x}\mathrm{dx} = -\ln|1-x| + C$$

(בדיקה

$$[-\ln|1-x|]' = -\frac{1}{1-x}\cdot(-1) = \frac{1}{1-x}$$

ואכן מצאנו קדומה) ולכן

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1-x}\mathrm{dx} = \lim_{t\to1^-} -\ln|1-x|\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{t} = \lim_{t\to1^-} -\ln|1-t| + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \infty$$

ולכן $\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{1}{\ln(x)}\mathrm{dx}$ מתבדר ולכן הכיוון שלנו לא עובד. כי

$$-\frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{|\ln(x)|} \geq \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}$$

ולכן מהתבדרות הגדול לא ניתן להסיק על הקטן - שזה אינטגל חבר לאינטגל בשאלה שלנו.
נחזור - השאלה שלנו שקולה לשאלה, האם $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}\mathrm{dx}$ מתכנס או מתבדר. נשווה עם $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$:

$$\lim_{x\to1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to1^-} \sqrt{\frac{\frac{1}{|\ln(x)|}}{\frac{1}{1-x}}} \underbrace{=}_{\text{חישוב ממקודם}} \sqrt{1} = 1$$

ולכן האינטגל בשאלה שלנו חבר של $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{dx}$. נמצא קדומה

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{dx} = -2\sqrt{1-x} + C$$

ולכן

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{dx} = \lim_{t\to1^-} \left[-2\sqrt{1-t} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 0 + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

לסיכום: האינטגרל בשאלה מתכנס. יאי!.

(ו) $\int_1^\infty \left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{dx}$

פתרון: גבול מוכר

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}=\frac{1}{2}$$

נשווה ל $\frac{1}{x^2}$ (ראוי לכתוב גם בכל התרגילים הקודמים, אם פספסתי - הפונקציות חיוביות בקטע של האינטגרל).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\{\text{לופיטל}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}}=$$

ושוב יש לנו $\frac{0}{0}$, לופיטל נוסף, יתן

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{2\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{1}{2}$$

ולכן האינטגרל של השאלה - מתכנס!

לינארית

1. הוכיחו שהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הפיכה. מצאו את ההופכית, A^{-1}.

פתרון: נשתמש במה שבטח ראיתם בהרצאה, ונדרג את המטריצה 3×6, $(A|I)$. אם בצורה הקנונית שלה יש I בחלק השמאלי, אז בחלק הימני תהי A^{-1}. כלומר

$$(A|I) \to \cdots \to \left(I|A^{-1}\right)$$

נעשה זאת,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

קיבלנו שבצד שמאל יש I לכן המטריצה A הפיכה ומתקיים

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(א) פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_3 & = 4 \end{cases}$$

פתרון: נשים לב ש $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ממקודם, היא מטריצת המקדמים של המערכת.

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור הקבועים (התוצאה/למה שמשווים) ו $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ וקטור המשתנים ואז המערכת היא

$$Ax = b$$

ומכיוון A הפיכה, הפתרון למערכת הוא

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. תהא $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה ותהיינה $B,C\in\mathbb{R}^{n\times m}$ מטריצות כך ש $AB=I_m$ וגם $CA=I_n$ (לא בהכרח אותו I). הוכיחו כי $B=C$.

פתרון: נשתמש בכך שכפל מטריצות הוא קיבוצי, ונחשב

$$B=I_n\cdot B=(CA)\,B=C\,(AB)=C\cdot I_m=C$$

(א) האם יכולה להיות מטריצה A כך שקיימת B המקיימת $AB=I$ אבל לא קיימת C כך ש $CA=I$?

פתרון: כן, יכול להיות! למשל

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אז

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

אבל לא קיימת C כך ש $CA=I$. למה? בואו נניח בשלילה שקיימת C המקיימת $CA=I$ אז לפי טענה קודמת $B=C$. אז נבדוק

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq I$$

סתירה.

הערה - משפט: תהא A **לא ריבועית** כך שקיימת B עבורה $AB=I$ אז בהכרח $BA\neq I$.

הערה - משפט: תהא A **ריבועית** כך שקיימת B עבורה $AB=I$ אז בהכרח $BA=I$.

3. תהא A מטריצה ריבועית. הוכיחו: A הפיכה אם ורק אם $A^3=A\cdot A\cdot A$ הפיכה (האמת שהחזקה 3 לא חשובה וזה נכון לכל חזקה טבעית).

פתרון: בכיוון אחד: נניח A הפיכה ונרצה להוכיח כי A^3 הפיכה. לפי ההנחה קיימת A^{-1} ואז

$$AAA\cdot A^{-1}A^{-1}A^{-1}=AA\left(AA^{-1}\right)A^{-1}A^{-1}=AA\cdot I\cdot A^{-1}A^{-1}=$$

$$=AAA^{-1}A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

וגם מתקיים $A^{-1}A^{-1}A^{-1}AAA=I$.

בכיוון השני: נניח A^3 הפיכה ונרצה להוכיח כי A הפיכה. לפי ההנחה קיימת הופכית ל A^3 שנסמנה ב B. כלומר

$$BA^3=I,A^3B=I$$

אבל לפי קיבוציות

$$BA^2\cdot A=I,\ A\cdot A^2B=I$$

ולכן קיבלנו ש $BA^2=A^2B$ (לפי טענה קודמת) והיא ההופכית של A.

4. תהא

$$A=\begin{pmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{pmatrix}$$

שתלויה בפרמטר k. עבור אילו ערכי k, מתקיים ש A^3 הפיכה?

פתרון: זה שקול, כמו שראינו, לשאול לאילו ערכי k המטריצה A הפיכה. נראה לאילו ערכים אפשר לדרג את A ל I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-kR_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k^2+1-k \end{pmatrix}$$

הגענו

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & \left(1-k^2\right)+(1-k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & (1-k)\,[1+k+1] \end{pmatrix}$$

אם כל האדומים שונים מאפס, נוכל להמשיך לדרג ל I (נוכל להפוך אותם ל 1 ואז לאפס את מי שמעליהם). אחרת, אחד מהאדומים שווה לאפס ובמקרה זה לא נוכל להגיע ע"י דירוג ל I (אולי לא פשוט להשתכנע אבל זה נכון - כרגע נבדוק זאת ידנית). הערכים עבורם אחד מהאדומים שווה אפס הן $k=1,-2$. נציב $k=1$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואם נציב $k=-2$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וגם פה לא הגענו לצורה קנונית שהיא I.

לסיכום: לכל k ששונה מ $1,-2$ המטריצה A הפיכה ובאופן שקול גם A^3 הפיכה.