מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 7

תזכורת:

הגדרה: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".

כאשר $x \equiv y \Leftrightarrow \exists A_{x,y} \in Conn, \{x,y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$

תכונות מרכיבי קשירות:

- $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ (יש חזרות! $x \equiv y \Leftrightarrow [x] = [y]$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.
- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

  רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup\{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x]=$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב X.

רמז: תוכיחו קודם את הטענה הבאה (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

טענה: (תרגול) נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** ($totally\ disconnected$) אם

$[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z}, d_p)$

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

<u>הגדרה</u>: (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$ של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x \equiv_P y \overset{def}{=} \text{קיימת ב} X \text{ מסילה מ } x \text{ ל } y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) $y \equiv_P x \Leftarrow x \equiv_P y$. עבור מסילה $f: [0,1] \to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" $f^*(t) = f(1-t)$ $f^*: [0,1] \to X$

3) $x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases}$

עבור $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$ נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש f_3 רציפה מהתרגיל הבא (שהיה בתרגול):

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $X \xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f|_{Y_1}: Y_1 \to Z$, $f|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

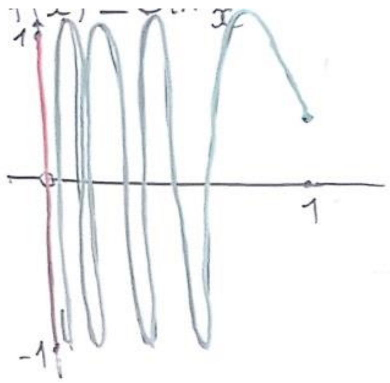
אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).

<u>הערה</u>: $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1] \xrightarrow{f} (0,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר $X := (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$ "Sine curve"

$$(0,1] \simeq Gr(f) := \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \le 1 \right\}$$



כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו $Gr(f)$ צפוף ב X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

__תרגיל:__ **(לעתיד)** לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

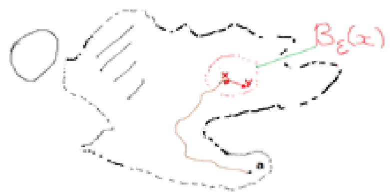
$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X \times Y$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

__**משפט**__: כל קבוצה __קשירה ופתוחה__ O במרחב __נורמי__ E היא קשירה מסילתית.

__הוכחה__: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O.
אז A פתוחה ב O. כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח ב O. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



__**הגדרה**__: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $U \supseteq V \in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

__תרגיל:__

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

הומיאומורפיזמים המשך:

- $[3,8] \ncong [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר.

__הגדרה__: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **__מחלקת__** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

למשל: בעקומה הבאה נקודות אדומות הן נקודות מחלקות

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם).

__טענה:__ אם $X \xrightarrow{f} Y$ המיאומו' אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$\underbrace{X/\{p\}}_{\text{פריק, ז"א לא קשיר}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

הסבר: שימוש (פעמיים) בתורשתיות של הרציפות.

- $[0,1) \ncong (2,5) \qquad (0,1) \ncong [2,3]$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $\quad [0,1)/\{0\} \in Conn$

תכונה חשובה: הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $0 \ncong 8$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- למיין עד כדי הומיאומורפיזמים:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

תרגיל: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ הם הומיאומורפיים.

הערה: כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

$$\Downarrow$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי f הומיאומורפיזם.

הגדרה: (אוטומורפיזמים)

- ***חבורת ההומיאומורפיזמים*** של מ"ט

$X \in TOP$, $Homeo(X) := \left\{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\right\}$ חבורה לגבי ההרכבה

- ***חבורת איזומטריות*** של מ"מ

$X = (X,d) \in Metr$, $Iso(X) := \{(X,d) \to (X,d) \text{ איזומטריות}\}$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז Iso(X,d) תת חבורה של $\text{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X) \leq Homeo(X) \underbrace{\leq}_{\text{ת"ח}} \underbrace{(S_X, \circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

הגדרה: נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X) \times X \to X \quad (f,x) \longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in \text{Homeo}(X)\}$ אורביטה (מסלול) של x.

הגדרה: אומרים ש X הוא **מ"ט הומוגני** ($homogeneous$) אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall\, x,y \in X, \exists f \in Homeo(X): f(x) = y$

זאת תכונה טופולוגית. זאת אומרת נשמרת ע"י הומיאומורפיזמים.

__דוגמה:__ כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני. כאן $Homeo(X,\tau_{discr}) = S_X$?

__דוגמה:__ $X = (0,2)$ מ"ט הומוגני.

אחד מההסברים: $(0,2) \simeq \mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}$ **הומוגני.**

__דוגמה:__ אם $X = [0,1) \cup \{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad [\tfrac{1}{2}] = (0,1)$$

__הגדרה:__ באופן דומה מגדירים מ"מ (X,d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \to X$ יש מסלול אחד).

__דוגמה:__ $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, S_n, $(\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: כאן $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

__תרגיל:__ כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X = (3,\infty)$

ב) $X = [0,1]$

ג) $X = 8$

ד) $X = (0,1) \cup (2,4) \cup \{7\}$.

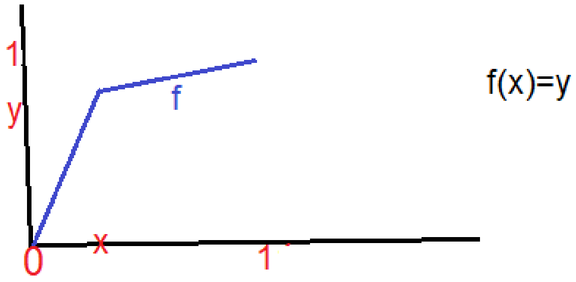
תשובה:

א) מסלול 1 (הומוגניות!). $(3,\infty) \simeq \mathbb{R}$ ו - $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0] = \{0,1\} = [1]$ $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x|0 < x < 1\}$

רמז: לא קיים $h \in Homeo([0,1])$ כך ש $0 < x < 1$, $h(0) = x$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.



$\forall 0<x<y<1 \quad \exists f \in Homeo([0,1]) \quad f(x)=y$

שיקוף $\exists f \in Homeo([0,1]) \quad f(0)=1$

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup} := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma \subseteq \gamma^{\cap F} \quad \gamma \subseteq \gamma^{\cup} \quad \varnothing \in \gamma^{\cup} \quad \varnothing \in \gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

$(t_1)\ \varnothing, X \in \tau \qquad (t_2)\ \tau^{\cap F} = \tau \qquad (t_3)\ \tau^{\cup} = \tau$.

<u>הגדרה:</u> (בסיס *basis*) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ – γ.

<u>הערה:</u> (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

<u>הגדרה:</u> נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא Pre-base (subbase)

פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ <u>שקול:</u> $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

הגדרה: אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** $(second\ countable)$ ונסמן:

$$(X,\tau) \in B_2$$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה.**

דוגמאות של בסיס טופולוגי: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X=\mathbb{R}$ $\gamma_1=\{(a,b) \mid a<b\}$ וגם $\gamma_2=\{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ בסיסים.
  $\gamma_3=\{(a,\infty),(-\infty,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ **פרה-בסיס** אבל לא בסיס.
- ב $X=\mathbb{R}^2$
  א. γ_0={עיגולים פתוחים}
  ב. $\gamma_1=\{(a,b)\times(c,d)\}$={"מלבנים" פתוחים}
  ג. γ_2={ריבועים פתוחים} γ_3={משולשים פתוחים}
  ד. γ_4={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}
- $\mathbb{R}^n \in B_2$

γ_4={כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}$} בן מניה !

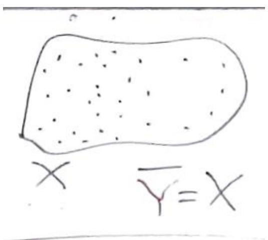
- ב $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O\subseteq\mathbb{R} : x\in O \Rightarrow \exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

אז $\gamma=\{[a,b) \mid a<b\}$ בסיס. תבדקו שכל $[a,b)$ היא קבוצה **סגורה** ב $(\mathbb{R},\tau_s)$.

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.
  א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup}=top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").
  ב. גם $\gamma_1 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

טענה: (תרגול) לכל (X,d) ולכל $\bar{Y}=X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



<u>תוצאה חשובה:</u> אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d) \in B_2 \Leftarrow (X,d) \in Sep$$

<u>טענה</u>: הוכיחו ש B_2 תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z \subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G \cap Z \mid G \in \gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

<u>טענה</u>: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x \in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0 \subseteq \gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \le \aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2$.

<u>משפט</u>: $B_2 \subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\varnothing \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$

אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X. אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$

לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \ne \varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ. ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

<u>תוצאה 1</u>: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

<u>תוצאה 2</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

<u>טענה</u>: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

<u>הערה</u> 1: $B_2 \neq Sep$.

קו סורגנפרי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep \quad (\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

<u>הערה</u> 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפרי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי (נלמד).

בסיס מקומי

<u>הגדרה:</u> $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$

קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש- (X, τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$

אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

<u>דוגמה:</u> לכל (X, d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\qquad \beta_3 := \{B[a, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

<u>תוצאה:</u> $Metriz \subset B_1$

<u>דוגמה:</u> $(X, \tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר נוסף : לכל $a \in (X, \tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.