תזכורת: ביום שישי הבאת בשעה 10, בוחן.

הגדרה: תהי X קבוצה. וB אוסף של תתי קבוצות של X שמקיים:

1. X שווה לאיחוד של קבוצות מB.
2. חיתוך של כל שתי קבוצות מB ניתן לכתוב כאיחוד כלשהו של קבוצות מתוך B.

במקרה כזה ניתן להגדיר טופולוגיה ע"י כך שהקבוצות הפתוחות יהיו איחודים של קבוצות מB.

דוגמא: נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה של פורטסנברג באופן הבא:

$$B = \{a\mathbb{Z}+b : a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$$

הוכיחו שB מהווה בסיס לטופולוגיה על $\mathbb{Z}$.

הוכחה:

1. $X = 1\mathbb{Z} + 0$
2. יהיו $a\mathbb{Z} + b, c\mathbb{Z} + d$.

אם החיתוך ריק- אז זה "איחוד ריק"- מאחדים 0 קבוצות מהקבוצה B.

אם הוא לא ריק, אז קיים איזשהו e בחיתוך. נשים לב שאם $e \in a\mathbb{Z} + b$ אז בעצם

$$a\mathbb{Z} + b = a\mathbb{Z} + e$$

באותו אופן

$$c\mathbb{Z} + d = c\mathbb{Z} + e$$

$$(a\mathbb{Z} + e) \cap (c\mathbb{Z} + e) = lcm(a, c)\mathbb{Z} + e$$

שזאת קבוצה מB.

מרחבי מכפלה

הגדרה: נניח ש$X_1, ..., X_n$ מרחבים טופולוגיים.

אנחנו רוצים להגדיר טופולוגיה על $X_1 \times \cdots \times X_n$.

ניקח את הקבוצות מהצורה $O_1 \times \cdots \times O_n$ כאשר O_i קבוצה פתוחה בX_i.

זה לא סגור לאיחודים.

למשל: ב$\mathbb{R}^2$

$$(0, 1) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times (1, 2)$$

היא איחוד של 2 מכפלות קרטזיות, אבל היא לא מכפלה קרטזית בעצמה.

אבל זה עונה על ההגדרה של בסיס.

אז בטופולוגיה המתקבלת היא: איחודים של מכפלות קרטזיות של קבוצות פתוחות.

והקבוצות שכתבנו מהוות בסיס.

תרגיל: הוכיחו שמכפלה של מרחבים דיסקרטיים היא מרחב דיסקרטי.

פתרון: מספיק להראות שכל נקודון פתוח.

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = \{a_1\} \times \cdots \{a_n\}$$

וכל נקודון פתוח כי זאת מכפלה של מרחבים דיסקרטיים.
תרגיל: יהיו X, Y מרחבים קוסופיים. האם $X \times Y$ הוא מרחב קוסופי?
פתרון: זאת הפרכה.
נקח $X = Y = \mathbb{Z}$.

$$(\{1\}^c \times \{1\}^c)$$

זאת מכפלה של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה בטופולוגיית המכפלה.

$$(\{1\}^c \times \{1\}^c)^c = (\{1\} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\})$$

הסבר: כי

$$(A \times B)^c = A^c \times Y \cup X \times B^c$$

תרגיל: האם מכפלה של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה?
כלומר, אם C_i סגורות בX_i, האם $C_1 \times \cdots \times C_n$ סגורה ב$X_1 \times \cdots \times X_n$?
פתרון:

$$(C_1 \times \cdots \times C_n)^c = (C_1^c \times X_2 \times ... \times X_n) \cup$$

$$(X_1 \times C_2^c \times ... \times X_n) \cup ...$$

כל C_i^c פתוחה, ולכן יש לנו פה איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות.
תרגיל: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו כי בטופולוגיית המכפלה על $X \times Y$ מתקיים: $cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$
פתרון: מהתרגיל הקודם נקבל ש$cl(A) \times cl(B)$ סגורה כמכפלה של קבוצות סגורות. וברור שהיא מכילה את $A \times B$. לכן $cl(A \times B) \subseteq cl(A) \times cl(B)$.
כעת תהי $(x, y) \in cl(A) \times cl(B)$. זה אומר ש$x \in cl(A), y \in cl(B)$.
תהי O סביבה של (x, y). כלומר, O פתוחה ו$(x, y) \in O$.
O היא איחוד של קבוצות שהן מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות.
כלומר, יש U וV פתוחות כך ש

$$(x, y) \in U \times V \subseteq O$$

$x \in cl(A)$ אמ"ם כל סביבה U של x מקיימת $U \cap A \neq \emptyset$.
אז U היא סביבה של x וV היא סביבה של y, אז מכך ש$x \in cl(A), y \in cl(B)$ נקבל ש$A \cap U \neq \emptyset, B \cap V \neq \emptyset$ ולכן $(A \times B) \cap (U \times V) \neq \emptyset$, כלומר $(A \times B) \cap O \neq \emptyset$.

תרגיל: יהא X מ״ט נגדיר את האלכסון $\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$. הוכיחו כי Δ סגור אמ״מ X הוא T_2

פתרון: $\Longleftarrow$ נניח שΔ סגור. זה אומר שΔ^c פתוח.

אנחנו רוצים להוכיח שX הוא האוסדרוף. יהיו $x \neq y \in X$. אז $(x,y) \in \Delta^c$. אנחנו יודעים שΔ^c פתוחה. לכן יש קבוצה פתוחה בסיסית שנדחפת בין הקבוצה לאיבר.

כלומר, U וV פתוחות כך ש $(x,y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$.

$x \in U, y \in V$.

אם היה $z \in U \cap V$ אז $(z,z) \in U \times V$, ואז $(z,z) \in (U \times V) \cap \Delta$ בסתירה לכך ש$U \times V \subseteq \Delta^c$. ולכן $U \cap V = \emptyset$.

$\Longrightarrow$ נניח שX הוא האוסדורף, ואנחנו רוצים להוכיח שΔ סגורה. שקול להוכיח שΔ^c פתוחה. תהי $(x,y) \in \Delta^c$. כלומר, $x \neq y$. בגלל שX הוא האוסדורף אז יש $x \in U, y \in V$ כך ש$U \cap V = \emptyset$. אז $(x,y) \in U \times V$, ו$U \times V \subseteq \Delta^c$. מש"ל.

תרגיל: הוכיחו כי Δהומיאומורפי ל X.

פתרון: $f : X \to \Delta$ $f(x) = (x,x)$. ברור שהיא חח"ע ועל.

ההופכית שלה זה $f^{-1}(x,x) = x$ שזה בעצם הטלה על הרכיב הראשון, וראיתם שפונקציית ההטלה היא פונקציה רציפה.

נראה שf רציפה. תהי O פתוחה בסיסית בΔ. אז היא חיתוך של קבוצה פתוחה בסיסית ב$X \times X$ עם Δ. כלומר $\Delta \cap (U \times V)$

$$f^{-1}(\Delta \cap (U \times V)) = U \cap V$$

חיתוך של קבוצות פתוחות ולכן פתוח.

תרגיל: האם מכפלה סופית של מרחבי האוסדורף היא מרחב האוסדורף?

פתרון: מספיק להוכיח עבור מכפלה של 2 מרחבים. נניח שX וY האוסדורף.

יהיו $(x,y) \neq (z,w) \in X \times Y$ המשמעות של זוגות שונים זה שאחד הרכיבים שונה. בה"כ $x \neq z$. בגלל שX הוא האוסדורף אז יש $x \in U, z \in V$ ו$U \cap V = \emptyset$.

$(x,y) \in U \times Y, (z,w) \in V \times Y$ וכן $(U \times Y) \cap (V \times Y) = \emptyset$.

תרגיל: תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. נגדיר את הגרף של הפונקציה להיות

$$Gr_f = \{(x, f(x)\} \subseteq X \times Y$$

הוכיחו ש$X \cong Gr_f$

הוכחה: נגדיר $F : X \to Gr_f$

$$F(x) = (x, f(x))$$

חח"ע ועל. רציפה כי:

תהי קבוצה פתוחה בסיסית. כלומר $Gr_f \cap (U \times V)$.

$$F^{-1}(Gr_f \cap (U \times V)) = U \cap f^{-1}(V)$$

בגלל שf רציף, אז $f^{-1}(V)$ פתוחה, וחיתוך של פתוחות פתוח.

ההופכית שלה זה הטלה על הרכיב הראשון, וידוע שזאת פונקציה רציפה.