

בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ז סמסטר קיץ מועד א

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות הפעלה:

יש לענות בפירוט על כל חמשת השאלות, כל תשובה מופיעה

במקומה בשאלון. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, ולא

יבדקו.

שימו לב: כל שאלה שווה 20 נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1

סעיף א (5 נקודות)

לכל אחד מהפסוקים הבאים קבעו אם הוא טאוטולוגיה (כלומר אמת

לכל הצבה של המשתנים). נמקו!

$$.i \quad (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

$$.ii \quad (p \uparrow q) \wedge (q \uparrow r) \rightarrow (p \uparrow r)$$

$$(p \uparrow q = \neg(p \wedge q)) \text{ זכרו כי}$$

סעיף ב (15 נקודות)

תהיינה A, B קבוצות כלשהן הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$.i \quad P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$.ii \quad P(A) \in P(B) \Leftrightarrow A \in B$$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 2

סעיף א (10 נקודות)

תהיינה A, B, C, D קבוצות ו $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית, כל אחד מהסעיפים הבאים:

- i. $h \circ g \circ f$ על גורר ש $g \circ f$ על.
- ii. $g \circ f$ הפיכה ו $h \circ g$ הפיכה גורר ש g הפיכה.

סעיף ב (10 נקודות)

תהיינה A, B קבוצות. נגדיר $f: P(A) \rightarrow P(B)$ ע"י $f(X) = X \cap B$. הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $A \subseteq B$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 3 (20 נקודות)

- א. תנו דוגמה לקבוצה $A \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X, Y \in A$ מתקיים $X \cap Y = \emptyset$.
- ב. תהי $A \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X, Y \in A$ מתקיים $X \cap Y = \emptyset$, הוכיחו כי A בת מנייה.
- ג. תהי $B \subseteq \mathbb{N}$ ותהי $C \subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה כך שלכל שתי קבוצות שונות $X, Y \in C$ מתקיים $X \cap Y = B$. הוכיחו כי C בת מנייה.
- ד. תהי $D \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X, Y \in D$ מתקיים $|X \cap Y| \leq 10$. הוכיחו ש D בת מניה.
- רמז: הביטו ב $\bigcup_{B \in I} D_B$, כאשר
- $$I = \{X \in P(\mathbb{N}) : |X| = 10\}, D_B = \{X \in D \mid B \subseteq X\}$$

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 4

סעיף א (10 נקודות)

הוכיחו שלכל קבוצה A מתקיים $|P(A)| > |A|$.

סעיף ב (10 נקודות)

נגדיר יחס S על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: ((x_1, y_1) S (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2)$$

- i. הוכיחו ש S הוא יחס שקילות.
- ii. מצאו את מחלקות השקילות $[(0,1)]_S$, $[(1,-3)]_S$ ואת מחלקת השקילות הכללית $[(a,b)]_S$, כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.
- iii. כתבו את קבוצת המנה $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / S$. מהי המשמעות הגיאומטרית של קבוצת המנה? (כאשר אנו מסתכלים על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ בתור המישור).

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 5

סעיף א (10 נקודות)

תהי $f: A \rightarrow A$ ותהי $B \subseteq A$. נגדיר סדרת קבוצות ע"י
 $A_1 = B \setminus f[f^{-1}[B]]$, $A_{n+1} = A_n \cup f^{-1}[A_n]$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n
מתקיים $A_n \cap \text{Im}(f) = \emptyset$.

סעיף ב (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- i. בגרף מסדר n לא יתכן שסכום דרגות כל קדקודיו יהיה: $n^2 + n$.
- ii. קיים גרף מסדר 6 שדרגות קדקודיו הן: 1,2,3,4,4,5.
- iii. לכל גרף עם מסלול אוילר ניתן להוסיף צלע ולקבל גרף עם מעגל אוילר.

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____