חדו"א 1ת

סמסטר חורף תשע"א

פתרון מועד א

08.02.2011

שאלה 1 (20 נקודות):

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_{3n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_{3n+2} = 2$. הראו כי לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש בדיוק שלושה גבולות חלקיים.

פתרון:

תהי $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת־סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ששואפת לגבול השונה משלושת הגבולות $0,\ 1,\ 2$ (יתכן גם שהגבול הוא אינסוף).

אזי קיים $\epsilon_0 > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים k_0 כך ש $n_{k_0} > N$ אבל $\left|a_{n_{k_0}} - L\right| \geq \epsilon_0$ עבור $L = 0, 1, 2$.

הסדרה $\{a_n\}$ מתפרקת לשלושת תתי־הסדרות $\{a_{3n}\}$,$\{a_{3n+2}\}$ו $\{a_{3n+1}\}$, ולכן כל איבר ב $\{a_{n_k}\}$ שייך לאחת מתתי־הסדרות הנ"ל.

לכן עבור k_0 קיים n_0 כך ש $n_{k_0} = 3n_0$ או $n_{k_0} = 3n_0 + 1$ או $n_{k_0} = 3n_0 + 2$.

אבל על פי הנתון עבור כל ϵ_0 קיים $N' \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N'$ מתקיים $|a_{3n} - 0| < \epsilon_0$ וגם $|a_{3n+1} - 1| < \epsilon_0$ וגם $|a_{3n+2} - 2| < \epsilon_0$.

לכן נבחר N' כך ש $n_0 > N' \Leftarrow n_{k_0} > N$ ונקבל סתירה.

שאלה 2 (20 נקודות):

א. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.

ב. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{e^x - 1}$.

פתרון:

א.

$$\left(\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = \left(1 - \sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$$

נטפל בכל איבר בנפרד:

$$\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n^2}}}\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^1$$

$$\left(1-\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} = \left[\left(1-\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{n^2}{2}\sin^2\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$

נשים לב שכל הגבולות סופיים (כמו גם הגבולות של המעריכים והחזקות, ולכן מותר היה לחשבם בנפרד) ואז על פי אריתמטיקה של גבולות, הגבול הוא $\sqrt{e}$.

* ניתן לפתור תרגיל זה גם על ידי שימוש בכלל לופיטל ־ להגדיר $x = \frac{1}{n}$, לעבור לפונקציות ע"י משפט היינה ולהפעיל $\ln$ על הביטוי.

ב. מכיוון ש $x \to 0^+$ $\Leftarrow$ $\sin x > 0$ נוכל להפעיל $\ln$:

$$(\sin x)^{e^x-1} = e^{(e^x-1)\ln\sin x}$$

נתבונן בגבול $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{(e^x-1)}}$, זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ומכיוון שהפונקציות במונה ובמכנה גזירות בסביבה הימנית של אפס, נוכל להתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\sin x\frac{1}{\frac{1}{(e^x-1)}} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)^2}{-e^x}\frac{\cos x}{\sin x}$$

נחשב את $\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)^2}{\sin x}$ בנפרד שוב ע"י משפט לופיטל (הפונקציות גזירות בסביבה ימנית של 0):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^x-1)e^x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

הגבול של הנגזרות קיים ושווה לאפס, ולכן גם הגבול המקורי הוא אפס, ולכן:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\sin x\frac{1}{\frac{1}{(e^x-1)}} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)^2}{-e^x}\frac{\cos x}{\sin x} = 0\cdot(-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+}e^{(e^x-1)\ln\sin x} = e^0 = 1$$

* ניתן לחשב גבול זה גם בדרכים אחרות (למשל ע"י פיתוח טיילור).

שאלה 3 (20 נקודות):

לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}dt$.

א. (10 נק') מהי $F'(x)$?

ב. (10 נק') הראו כי לכל $x \geq 0$ מתקיים: $F(x) \geq x\sin x$.

פתרון:

א. הפונקציה e^{t^2} רציפה בכל הישר, ו x^2 גזירה בכל הישר, ולכן על פי המשפט היסודי: $F'(x) = 2xe^{x^4}$.

ב. נגדיר $G(x) = F(x) - x\sin x$.

$G(x)$ גזירה כהפרש של גזירות, ומקיימת: $G'(x) = 2xe^{x^4} - \sin x - x\cos x = x\left(2e^{x^4} - \cos x\right) - \sin x$.

לכל $x \geq 0$ מתקיים $2e^{x^4} - \cos x \geq 1$ (כי $e^{x^4} > 1$) ולכן לכל $x \geq 0$ $G'(x) \geq 0$ ולכן $G(x)$ פונקציה עולה.

ומכיוון ש $G(0) = 0$ אזי לכל $x \geq 0$, $G(x) \geq 0$.

שאלה 4 (20 נקודות):

תהי $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נתון כי $|f'(x)| \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$ וכמו כן ש- $f(\frac{1}{2}) = 1$.

א. (10 נק') הראו כי לכל $x \in [0,\frac{1}{2}]$ מתקיים $f(x) \geq \frac{1}{2} + x$.

ב. (10 נק') הראו כי $\int_0^1 f \geq \frac{3}{4}$.

פתרון:

א. נגדיר $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$ אזי g גזירה כהפרש של גזירות, ומתקיים: $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$ (כי $|f'(x)| \leq 1$).

לכן g פונקציה יורדת. אבל $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - 1 = 0$ ולכן לכל $x \in [0,\frac{1}{2}]$ מתקיים $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} - x \geq 0$.

ב. נראה כי עבור $x \in [\frac{1}{2},1]$ גם מתקיים $f(x) \geq \frac{3}{2} - x$.

נגדיר $g(x) = f(x) + x - \frac{3}{2}$ אזי g גזירה כהפרש של גזירות, ומתקיים: $g'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$ (כי $|f'(x)| \leq 1$).

לכן g פונקציה עולה, ומכיוון ש $g(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0$ אזי $g(x) \geq 0$ לכל $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2} - x\right) dx = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

שאלה 5 (20 נקודות):

תהי $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נתון כי לכל n טבעי מתקיים $f(n) \geq 1$.

א. (5 נק') הראו כי אם האינטגרל $\int_1^\infty f$ מתכנס, אזי קיימת נקודה $x_0 \in [0, \infty)$ כך ש- $f(x_0) < 1$.

ב. (15 נק') הראו כי אם האינטגרל $\int_1^\infty f$ מתכנס, אזי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ולכל n מתקיים $f'(x_n) = 0$.

פתרון:

א. נניח כי לא קיימת נק' כנ"ל, אזי $f(x) \geq 1$ לכל $x_0 \in [0, \infty)$, ואז $\int_1^\infty f(x)dx \geq \int_1^\infty 1dx \geq 0$ וממבחן ההשוואה לאינטגרל מוכלל נקבל כי $\int_1^\infty f(x)$ מתבדר בסתירה לנתון.

ב. על פי סעיף א, קיימת נקודה $x_1 \in [0, \infty)$ כך ש $f(x_1) < 1$.

כמו כן מתקיים $f([x_1]),\ f([x_1] + 1) \geq 1$ ומכיוון ש f רציפה בקטעים $[x_1,\ [x_1] + 1]$, $[[x_1],\ x_1]$,

אזי על פי משפט ערך הביניים קיימים $a_1 \in [x_1,\ [x_1] + 1]$, $b_1 \in [[x_1],\ x_1]$ כך ש $f(a_1) = f(b_1) = 1$.

f גזירה בקטע (a_1, b_1) ולכן על פי משפט רול קיימת נקודה $c_1 \in (a_1, b_1)$ כך ש $f'(c_1) = 0$.

באותו אופן קיימת נקודה $x_2 > [x_1] + 1$ כך ש $f(x_2) < 1$, אחרת האינטגרל $\int_{[x_1]+1}^\infty f(x)dx$ יתבדר (וזה לא יתכן כי $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס).

נחזור על אותו התהליך, ונקבל שקיימת $c_2 > c_1$ כך ש $f'(c_2) = 0$.

ובאופן כזה נבנה את הסדרה $\{c_n\}$ שמקיימת $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ (כי כל $c_{n+1} > c_n$ ו $c_{n+2} - c_n > 1, \forall n$) ולכל n מתקיים $f'(c_n) = 0$.

* ניתן גם להראות עבור סדרת האינטגרלים $f_n = \int_n^\infty f(x)dx$ מקיימת נקודה כנדרש, ואז לקבל את התוצאה ע"י השאפת n לאינסוף.