

**אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן
מועד א' התשע"ז**

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים : אחיה בראון, אריאל וייצמן, ביאנה פרידמן-שטיינבוך ואיתמר שטיין.

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לחלק הראשון ותכננו את חלוקת הזמן!
מספיקות 40 דק לכל אחת מהשאלות האחרות!
מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!

בסוף הבחינה יש דפי טיוטה לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הווקטורים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות: שאלות 1-2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

בס"ד
חלק א' – הוכחה (20 נק' לשאלה)

ענו על אחת בלבד מהשאלות הבאות:

1. נסחו והוכיחו $A \in F^{m \times n}$ מימד מרחב השורות = מימד מרחב העמודות.
2. נסחו והוכיחו $A \in F^{n \times n}$ לכסינה אמ"ם קיים ל F^n בסיס המורכב מ"ע של A .

המשך תשובה לחלק א'

חלק ב'- שאלות פתוחות – יש לענות על כל השאלות!

3. (25 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{א. תהי } A \text{ המטריצה הממשית:}$$

i. (8) מצאו בסיס ומימד עבור: $R(A), C(A)$.

ii. (5) השלימו את $R(A)$ לבסיס של R^4 .

iii. (4) מצאו מטריצה אחרת $B \in R^{4 \times 4}$ כך שלכל $b \in R^4$ עבורו

המערכת $Ax = b$ היא פתירה, גם המע' $Bx = b$ היא פתירה.

אבל לא מתקיים להיפך.

ב. תהי $T: R^4 \rightarrow R^4$ המוגדרת ע"י $T(x) = Ax$ (אותה מטריצה מסעיף א)

i. (5) מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של T .

ii. (5) האם היא חח"ע? האם היא על? נמקו!

המשך התשובה לשאלה 3

המשך התשובה לשאלה 3

4. (20 נק') - נתונה המטריצה הבאה: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- א. (12 נק') מצאו מטריצה $P \in R^{n \times n}$ אורתוגונאלית ומטריצה $D \in R^{n \times n}$ אלכסונית כך שמתקיים $P^T A P = D$.
- ב. (4 נק') האם המטריצה A מסעיף הפיכה? הסבירו!!!
 אם לא, מצאו $B \neq 0$ כך ש: $AB = 0$. אם כן, הביעו את ההופכית שלה בעזרת I, A, A^2 .
- ג. (4) מצאו בעזרת סעיף א' בלבד את הבסיס ל**מרחב הניצב** ל- $C(A)$.
 (ביחס למכפלה הסקלרית הסטנדרטית) (מי שיחשב יקבל 2 נק' בלבד)

המשך התשובה לשאלה 4

המשך התשובה לשאלה 4

5. (20 נק')

תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 . נגדיר את המטריצות :

$$C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \quad \text{- שתיהן מטריצות מסדר } 6 \times 3.$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

- א. $rank A = rank B$
- ב. $rank A = rank C$
- ג. קיימת מטריצה A עבורה הדרגה של אחת מבין המטריצות C, B היא בדיוק $2rank A$.
- ד. קיימת מטריצה A עבורה הדרגה של אחת מבין המטריצות גדולה ממש מ $2rank A$.

המשך תשובה 5

6. (25 נק') ניתן להשתמש בסעיף א' ע"מ לפתור את ב' גם אם לא פתרתם את א'.

- א. תהי $A \in R^{n \times n}$. הוכיחו שלכל סקלר $\alpha \in R$ מתקיים שעבור הפולינום האופייני של αA
- $$P_{\alpha A}(x) = \alpha^n P_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$
- ב. נניח שקיימת מטריצה $P \in F^{n \times n}$ הפיכה וקיים סקלר c עבורו מתקיים:
- $$P^{-1}AP = cA$$
- הוכיחו כי או ש קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש $c^k = 1$ או ש A לא הפיכה ($A^n = 0$ - בפרט...)

המשך תשובה לשאלה 6

המשך תשובה לשאלה 6

טיוטה

טיוטה

טיוטה

טיוטה