פתרון מועד ב תשעח

1. בהרצאה.
2. בהרצאה.
3.

(א) מחישוב ישיר

$$B=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&8&6\\8&8&8\\6&8&10\end{pmatrix}$$

הפ"א (תשובה סופית) הוא $p_B(x)=x\,(x-24)\,(x-4)$
לכן יש שלושה ע"ע שהם $\{\lambda_3=0,\lambda_2=4,\lambda_1=24\}$. המ"ע הם (תשובה סופית)
$V_{24}=N(B-24I)$:

$$V_{24}=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$V_4=N(B-4I)$:

$$V_4=\left\{\begin{pmatrix}-t\\0\\t\end{pmatrix}:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$V_0=N(B)$:

$$V_0=\left\{\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix}:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא בסיסים או"נ למ"ע ע"י הפעלת גרם שמדיט על הבסיסים של המרחבים ונקבל כי $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס או"נ ל $\mathbb{R}^3$ (כי בנוסף לגרם שמידט שביצענו, ידוע כי ו"ע של ע"ע הם או"ג). לכן

$$V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

היא מטריצה או"ג המקיימת

$$V^TBV=\begin{pmatrix}24&&\\&4&\\&&0\end{pmatrix}$$

(ב) לפי התיאוריה, V היא המטריצה מסעיף הקודם ו $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{24} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \end{pmatrix}$ ו

$$U = \left(\frac{Av_1}{\sqrt{24}}, \frac{Av_2}{\sqrt{4}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{24}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{24}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

כאשר $v_i = C_i(V)$. אפשר לוודא כי $V^TV = I$ וגם $U^TU = I$

(ג) לפי התיאוריה $N(A) = span\left\{C_3(V)\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(ד) כיוון ש $R(A) = N(A)^{\perp}, R(B) = N(B)$ נראה כי $N(A) = N(B)$
($\subseteq$) יהא $x \in N(A)$ אז $Ax = 0$ ולכן $A^tAx = 0$ כלומר $x \in N(B)$
($\supseteq$) יהא $x \in N(B)$ אזי $A^tAx = 0$ לכן $x^tA^tAx = 0$ לכן $0 = x^tA^tAx =$ $(Ax)^t(Ax) = \|Ax\|^2$ לכן $Ax = 0$ לכן $x \in N(A)$

(ה) $C = AA^T = \left(U\Sigma V^T\right)\left(U\Sigma V^T\right)^T = U\Sigma\Sigma^TU^T$. לכן C הפיכה כמכפלה של הפיכות (U, U^T או"ג ובפרט הפיכות ו $D = \Sigma\Sigma^T = \begin{pmatrix} 24 & \\ & 4 \end{pmatrix}$ הפיכה כי הדט' שלה ששונה מאפס) ולכן

$$\det C = \det U \cdot \det D \cdot \det U^t = \det D = 96$$

כאשר המעבר השני הוא בגלל שכל מטריצה או"ג ממשית מקיימת כי הדט שלה היא ± 1 ובנוסף $\det U^t = \det U$. ואז

$$\det\left(adj(C)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(adj(C)\right)} = \frac{1}{\det\left(C\right)^{2-1}} = \frac{1}{96}$$

כאשר המעברים מתבססים על משפטים עבור מטריצות הפיכות.

.4

(א) מתקיים כי T חח"ע +על אמ"מ $[T]_S^S$ הפיכה (כאשר S הבסיס הסטנדרטי). נחשב ישירות את המטריצה המייצגת ונקבל $[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{pmatrix}$. נבדוק מתי היא הפיכה ע"י חישוב הדטר' שלה.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k & b-1 \\ 0 & 1-k & 2b-1 \end{pmatrix}\right| = (1-k)(2b-1) - (1-k)(b-1) = (1-k)\,b$$

ולכן $[T]_S^S$ הפיכה אמ"מ $(k \neq 1) \wedge (b \neq 0)$.

(ב) עבור $b = 0$:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$ImT = C([T]) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

כי עמודות 1+3 הן עמודות שיש בהם איבר מוביל. בנוסף

$$\ker T = N([T]) = \left\{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) נגדיר $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י $S(v)=2T(v)$ ˙ ואז הגרעינים שווים כי $Sv=0 \iff 2Tv=0 \iff Tv=0$ והתמונות שוות כי $Sv=2Tv\in Im(T)$ וגם $Tv=S\left(\frac{1}{2}v\right)\in Im(S)$. אבל $S\neq T$ כי $S(e_1)\neq T(e_1)$. העתקה S בצורה מפורשת הי כאשר e_iאלו וקטורי היחידה. במפורש

$$S\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=2T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=2\left(aTe_1+bTe_2+cTe_3\right)=\begin{pmatrix}2(a+b+c)\\2(b+c)\\2(b+c)\end{pmatrix}$$

.5

(א) כיוון ש x^4-1 הוא הפ"א אזי הע"ע שלה (כמטריצה מרוכבת) הם $\pm 1,\pm i$ולכן יש לה 4 ע"ע שונים. לכל אחד יש ו"ע אחד לפחות. כיוון שו"ע של ע"ע שונים בת"ל יש לה לפחות 4 ו"ע בת"ל. כיוון שיש לה לכל היותר 4 ו"ע בת"ל (בגלל המימד) נקבל שיש לה בדיוק 4 ו"ע בת"ל ולכן לכסינה.

(ב) הפרכה: $A=I,B=-I$. מתקיים כי $N(A)=\{0\}=N(B)$ אבל $N(A+B)=\mathbb{R}^n$ שאינו מוכל ב $N(A)$.

(ג) לפי משפט, כל v ניתן להצגה כ $v=\sum_{i=1}^n\langle v,v_i\rangle v_i$ כי E בסיס או"נ. לכן $Ax=\sum_{i=1}^n\langle Ax,v_i\rangle v_i=\sum_{i=1}^n\langle y,v_i\rangle v_i$ מצד שני כיוון ש E מורכבת מו"ע נקבל כי

$$Ax=A\left(\sum_{i=1}^n\langle x,v_i\rangle v_i\right)=\sum_{i=1}^n\langle x,v_i\rangle Av_i=\sum_{i=1}^n\langle x,v_i\rangle \lambda_i v_i$$

ומהשוואה בין השניים נקבל כי $\sum_{i=1}^n\langle y,v_i\rangle v_i=\sum_{i=1}^n\langle x,v_i\rangle\lambda_i v_i$. כיוון ש E בסיס נקבל $\langle y,v_i\rangle=\langle x,v_i\rangle\lambda_i$ לכל i. בנוסף $\lambda_i\neq 0$ כי A הפיכה ולכן $\langle x,v_i\rangle=\frac{\langle y,v_i\rangle}{\lambda_i}$ ומכאן ש

$$x=\sum_{i=1}^n\langle x,v_i\rangle v_i=\sum_{i=1}^n\frac{\langle y,v_i\rangle}{\lambda_i}v_i$$

כנדרש.