בוחן בדידה 1 למהנדסים, 83-116, סמסטר ב תשעח

כ"ב אייר 7/5/2018

מרצה: ד"ר ריטה סולומיאק.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- סך הנקודות המוקצבות לשאלה הוא 108 נקודות, אך לא ניתן לקבל ציון מעל 100 בבוחן.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות. הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ is in odd number of sets } A_i\}$. כלומר, ההפרש הסימטרי של n קבוצות הוא קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$. (18 נקודות)

<u>פתרון:</u>

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ ברור כי מתקיים התנאי.

נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי

$$A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = ((A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n))$$

כעת, אם $x \in (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \setminus A_{n+1}$ אז מהנחת האינדוקציה הוא נמצא במספר אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, \ldots, A_n$ והוא לא ב A_{n+1} ולכן נשאר מספר אי זוגי של קבוצות. אם $x \in A_{n+1} \setminus (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n)$, אז מהנחת האינדוקציה הוא נמצא במספר זוגי של קבוצות מתוך $A_1, \ldots, A_n$ ובנוסף הוא נמצא ב A_{n+1}, ולכן בסה"כ במספר אי־זוגי של קבוצות (זוגי +1 = אי־זוגי).

הסבר: טעות נפוצה היא לטעון כך: $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1}$ אזי או ש־ $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת האינדוקציה (שזה נכון). או ש־$x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ ולכן הוא נמצא בקבוצה אחת שזה מספר אי זוגי.

זה לא נכון, כי: מהטענה ש־$x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ לא נובע ש־x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות בהפרש הסימטרי). מה שכן אפשר לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם במספר זוגי של הקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$ סה"כ x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות.

2. יהיו $P(x,y), Q(x,y), R(x,y)$ פרדיקטים מעל השלמים (כלומר, $x, y \in \mathbb{Z}$). נתבונן בפסוק הבא:

$$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

א. הקיפו את כל הפסוקים השקולים לשלילת הפסוק (18 נקודות. **שימו לב**, הקפת סעיף לא נכון תוריד נקודות (!), אך לא אתן פחות מאפס נקודות על השאלה...).

1. $\neg(\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y))))$.
2. $\exists x \neg(\exists y (P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y))))$.
3. $\exists x \forall y (P(x,y) \leftarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$.
4. $\exists x \forall y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(x,y))$.
5. $\forall x \exists y \neg(P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$.
6. $\exists x \forall y (P(x,y) \wedge (\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$
7. $\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$.

ב. מצאו פרדיקטים $P(x,y), Q(x,y), R(x,y)$ כך שהצבתם בשלילת הפסוק מניבה פסוק אמת. נמקו. (18 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א. 1,2,6

ב. נתבונן בפסוק מספר 6: $\exists x\forall y(P(x,y)\wedge(\neg Q(x,y)\vee R(x,y)))$. אנחנו רוצים למצוא x כך שלכל y נקבל $P(x,y)=$ $T\wedge(R(x,y)=T\vee Q(x,y)=F)$. הכי פשוט זה להגדיר שלכל (x,y) $P(x,y)=R(x,y)=T$. ואז אכן קיים x כדרוש, למשל 0 (או כל שלם אחר שתבחרו).

3. א. תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו: $A=B$ אם ורק אם לכל קבוצה C מתקיים $A\cup C=B\cup C$. (18 נקודות)

ב. תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחת קבוצות לא ריקה. הוכיחו:

$$\forall i\in I:\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq A_i\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$$

(18 נקודות)

ג. תהיינה $A,B\subseteq U$ (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). הוכיחו: אם $A\nsubseteq B\wedge B\nsubseteq A$ אז $A^c\nsubseteq B^c\wedge B^c\nsubseteq A^c$. (18 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א.$\Leftarrow$: כיון שנתון $A=B$, אז איפה שכתוב A אפשר פשוט לכתוב B במקום, ולכן לכל C נקבל $A\cup C=B\cup C$.

$\Rightarrow$: נניח שלכל C מתקיים $A\cup C=B\cup C$, לכן הדבר נכון גם עבור הקבוצה הריקה. כלומר, מתקיים $A=A\cup\varnothing=$ $B\cup\varnothing=B$, וקיבלנו $A=B$.

ב.יהי $i\in I$, ויהי $x\in\bigcap_{j\in I}A_j$, לכן לכל $j\in I$ מתקיים $x\in A_j$ (מהגדרת חיתוך כללי - איבר נמצא בחיתוך אם ורק אם הוא נמצא בכל אחת מהקבוצות), ולכן בפרט עבור i נקבל $x\in A_i$. כעת אנו עוברים להכלה השנייה: כיון ש-$x\in A_i$ נקבל שקיים איזשהו $i\in I$ כך ש $x\in A_i$, ולכן לפי הגדרת איחוד כללי (איבר נמצא באיחוד אם ורק אם קיימת קבוצה בה הוא נמצא) נקבל $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$.

ג. $A\nsubseteq B$ אומר שקיים x כך ש- $x\in A\wedge x\notin B$, וכנ"ל $B\nsubseteq A\Rightarrow\exists y:y\in B\wedge y\notin A$ (אני בכוונה קורא להם בשני שמות, כי לא יכול להיות שאותו איבר נמצא בA וגם לא נמצא בA). לכן $(x\in B^c\wedge x\notin A^c)\wedge(y\in A^c\wedge y\notin B^{c})$ ולכן $A^c\nsubseteq B^c\wedge B^c\nsubseteq A^c$.