פתרון תרגיל בית 5

שאלה 1

נתונים $B_1=\left\{1+x,1-x^2,-x+x^2\right\}$, $B_2=\left\{1+x,x+x^2,1+x^2\right\}$ בסיסים של $P_2\left[x\right]$.

א. מצאו את וקטורי הקואורדינאטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 (במילים אחרות – מטריצת המעבר מ B_1 ל- B_2.

ב. נתון וקטור v כך ש $\left[v\right]_{B_1}=\left(1,2,1\right)$. מצאו את $\left[v\right]_{B_2}$.

פתרון שאלה 1

א.

$$1+x=1\cdot(1+x)+0\cdot\left(x+x^2\right)+0\cdot\left(1+x^2\right)\rightarrow[1+x]_{B_2}=(1,0,0)$$
$$1-x^2=1\cdot(1+x)-1\cdot\left(x+x^2\right)+0\cdot\left(1+x^2\right)\rightarrow\left[1-x^2\right]_{B_2}=(1,-1,0)$$
$$-x+x^2=-1\cdot(1+x)+0\cdot\left(x+x^2\right)+1\cdot\left(1+x^2\right)\rightarrow\left[-x+x^2\right]_{B_2}=(-1,0,1)$$

לכן מטריצת המעבר היא: $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ב.

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

שאלה 2

יהא $V=\mathbb{R}^2$, עם הבסיסים $B=\left\{\left(4,5\right),\left(1,0\right)\right\}$, $C=\left\{\left(1,1\right),\left(2,3\right)\right\}$.

מצא את המטריצה P המקיימת $P\left[v\right]_B=\left[v\right]_C$.

פתרון שאלה 2

$$\left(1,1\right)=\frac{1}{5}\left(4,5\right)+\frac{1}{5}\left(1,0\right)$$
$$\left(2,3\right)=\frac{3}{5}\left(4,5\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)\left(1,0\right)$$

מטריצת המעבר היא $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

שאלה 3

יהיו $A,B\in F^{m\times n}$ הוכח:

א. $rank\left(A+B\right)\le rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$

ב. לכל $0 \neq \alpha \in F$ מתקיים: $rank(A+\alpha B) \geq |rank(A) - rank(B)|$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. יהיו $a_i, 1 \leq i \leq n$ העמודות של A ו $b_j, 1 \leq j \leq n$ העמודות של B.

$$C(A+B) = span(\{a_i + b_i \mid 1 \leq i \leq n\})$$
$$C(A)+C(B) = span(\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}) + span(\{b_j \mid 1 \leq j \leq n\}) = span(\{a_i, b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\})$$
$$span(\{a_i + b_i \mid 1 \leq i \leq n\}) \subseteq span(\{a_i, b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}) \Rightarrow C(A+B) \subseteq [C(A)+C(B)]$$
$$\Rightarrow \dim(C(A+B)) \leq \dim C(A) + \dim C(B) \Rightarrow rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

ב.

$$C(A+\alpha B) = span(\{a_i + \alpha b_i \mid 1 \leq i \leq n\})$$
$$C(A)-C(B) = span(\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}) + span(\{-b_j \mid 1 \leq j \leq n\}) = span(\{a_i, -b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\})$$
$$span(\{a_i, -b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}) \subseteq span(\{a_i + \alpha b_i \mid 1 \leq i \leq n\}) \Rightarrow [C(A)-C(B)] \subseteq C(A+\alpha B)$$
$$\Rightarrow \dim C(A+\alpha B) \geq \dim(C(A)-C(B)) \Rightarrow rank(A+\alpha B) \geq |rank(A) - rank(B)|$$

<u>שאלה 4</u>

תהיי $A \in F^{n \times n}$ הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. A אינה הפיכה.

ב. עמודות A תלויות לינארית.

ג. $rank(A) < n$.

ד. שורות A תלויות לינארית.

ה. קיים $b \in F^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ו. למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי.

<u>פתרון שאלה 4</u>

א$\Leftarrow$ב: אם A אינה הפיכה אזי A^t אינה הפיכה ושקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים לכן יש לפחות 2 שורות ת"ל לכן עמודות A ת"ל.

ב$\Leftarrow$ג:אם עמודות A ת"ל אזי היא שקולות עמודות למטריצה עם עמודת אפסים אחת לפחות לכן $rank(A) < n$.

ג$\Leftarrow$ד: $rank(A) < n$ לכן היא שקולת שורות למטריצה עם לפחות שורת אפסים אחת לכן השורות ת"ל.

ד$\Leftarrow$ה: שורות A ת"ל לכן שקולות שורה למטריצה עם שורת אפסים, ניקח b שבו מול שורת האפסים לאחר הדירוג יש איבר שונה מאפס ולמערכת זו אין פתרון.

ה$\Leftarrow$ו: ל $Ax = b$ אין פתרון לכן ב A יש שורת אפסים לכן למערכת $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.

ו$\Leftarrow$א: ל $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי לכן יש ב A שורת אפסים לכן A לא הפיכה.

שאלה 5

יהיו $b=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$.

א. דרג את המטריצה המצומצמת A ואת המורחבת $(A|b)$

ב. מהם $rank(A), rank(A|b)$? האם למערכת $Ax=b$ יש פתרון?

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$?

ד. מצא בסיס ל $Null(A)$

ה. מצא פתרון כללי למערכת $Ax=b$.

פתרון שאלה 5

א.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\5&6&7&8&-2\\9&10&11&12&-2\\13&14&15&16&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_2-5R_1\to R_2\\R_3-9R_1\to R_3\\R_4-13R_1\to R_4}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\0&-4&-8&-12&8\\0&-8&-16&-24&16\\0&-12&-24&-36&24\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_3-2R_2\to R_3\\R_4-3R_2\to R_4\\-\frac{1}{4}R_2\to R_2}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\0&1&2&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ב. $rank(A|b)=rank(A)=2$ למערכת $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות.

ג. לפי משפט שלמדנו $n=rank(A)+\dim(Null(A)) \Leftarrow \dim(Null(A))=2$.

ד.

$$x_4=s, x_3=t, x_2=-3s-2t, x_1=2s+t$$

$$\Rightarrow (2s+t,-3s-2t,t,s)=t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ בסיס ל $Null(A)$.

ה. נמצא פתרון פרטי ללא הומוגנית: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

פתרון כללי של הלא הומוגנית הוא פתרון כללי של ההומוגנית + פתרון פרטי של הלא הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t+2s\\-1-2t-3s\\1+t\\-1+s\end{pmatrix}$$

שאלה 6

א. חשב את הדטרמיננטה של $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{C}$.

ב. יהיו $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ שלא כולם שווים ל 0. הוכח שהמטריצה $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$ הפיכה.

פתרון שאלה 6

א. $\det = -2$.

ב. $\det = -\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2 \neq 0$ לכן המטריצה הפיכה

שאלה 7

א. הוכח כי לכל $A \in F^{n\times n}$ ו $\alpha \in F$ מתקיים $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

ב. יהי $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי ותהיי $A \in F^{n\times n}$ אנטי סימטרית. הוכח שאם $char(F) \neq 2$ אזי מתקיים $\det(A) = 0$ לכל A. הסבר מדוע זה לא נכון כאשר $char(F) = 2$.

פתרון שאלה 7

א. מתכונות הדטרמיננטה שאם מכפלים שורה בסקלר α אזי $\det \rightarrow \alpha \det$. αA זה להכפיל את כל n השורות ב α לכן הדטרמיננטה מוכפלת n פעמים ב α סה"כ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

ב.

$$|A| = |A^t|,\ |-A| = (-1)^n |A|$$
$$\Rightarrow |A| = |A^t| = |-A| = -1|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

אם $char(F) = 2$ אזי $2_F = 0$ ולכן המשוואה תתקיים עבור כל $|A|$

שאלה 8

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

פתרון שאלה 8

נבצע על העמודות את הפעולות האלמנטרית הבאות: $C_1 \leftrightarrow C_n, C_2 \leftrightarrow C_{n-1}, C_3 \leftrightarrow C_{n-2}.....$

כל חילוף מכפיל את הדטרמיננטה ב -1.

נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ - מטריצת היחידה בגודל n

$$\Rightarrow \det = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \begin{cases} 1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \; even \\ -1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \; odd \end{cases}$$