פתרון בוחן א' בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

הוראות יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (שאין בו ממש צורך).

בהצלחה!

שאלה 1. (30 נק') בכל סעיף קבעו האם הטענה נכונה או שגויה והוכיחו את קביעתכם:

א. החבורה $U_{18} \times \mathbb{Z}_5$ היא ציקלית.

ב. החבורה $U_{15} \times \mathbb{Z}_8$ היא ציקלית.

פתרון. התשובה בכל סעיף צריכה להתחיל במילה "הוכחה" או במילה "הפרכה", או ניסוח דומה שמסביר לקוראים מה התשובה תכיל.

א. <u>הוכחה: החבורה ציקלית.</u>
כדי להראות זאת, נמצא יוצר מפורש של $U_{18} \times \mathbb{Z}_5$. הסדר של U_{18} הוא $|U_{18}| = \varphi(18) = 18 \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-\frac{1}{3}) = 6$, ולכן מחפשים איבר $(a,b) \in U_{18} \times \mathbb{Z}_5$ מסדר $|U_{18} \times \mathbb{Z}_5| = 6 \cdot 5 = 30$.
נכתוב את איבר U_{18} במפורש: $U_{18} = \{1,5,7,11,13,17\}$. נטען כי 5 יוצר את U_{18}. כדי לוודא זאת, צריך לוודא ש-$o(5) = 6$. ממסקנה של משפט לגראנז', $o(5) \mid |U_{18}| = 6$, ולכן $o(5) \in \{1,2,3,6\}$. בבירור $o(5) \neq 1$; $o(5) \neq 2$ כי $5^2 = 25 \equiv 7 \in U_{18}$; $o(5) \neq 3$ כי $5^3 = 5 \cdot 5^2 \equiv 5 \cdot 7 = 35 \equiv 17 \in U_{18}$. לכן $o(5) = 6$, ו-5 הוא יוצר של U_{18}.
כעת נוכל להסיק כי $(5,1)$ הוא יוצר של $U_{18} \times \mathbb{Z}_5$. אכן, כפי שראינו בתרגול, $o((a,b)) = [o(a), o(b)]$ לכל $(a,b) \in U_{18} \times \mathbb{Z}_5$; בפרט $o((5,1)) = [6,5] = 30$ (שימו לב שחישבנו את הסדר של 5 בחבורה הכפלית U_{18}, ואת הסדר של 1 בחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_5$). לכן $U_{18} \times \mathbb{Z}_5$ היא ציקלית.

ב. <u>הפרכה: החבורה אינה ציקלית.</u>
כמו קודם, נתחיל מחישוב הסדר: $|U_{15}| = \varphi(15) = 15 \cdot (1-\frac{1}{3}) \cdot (1-\frac{1}{5}) = 8$.
כדי שהחבורה $U_{15} \times \mathbb{Z}_8$ תהיה ציקלית, צריך להיות איבר $(a,b) \in U_{15} \times \mathbb{Z}_8$ מסדר $|U_{15} \times \mathbb{Z}_8| = 8^2 = 64$. אבל כל האיברים בחבורה הזו הם מסדר לכל היותר 8, שהרי $(a,b)^8 = (a^8, 8b) = (1,0)$ (שימו לב להבדל בין הכתיב הכפלי של U_{15} לכתיב החיבורי של $\mathbb{Z}_8$).

שאלה 2. (36 נק') נתונה התמורה $\sigma = (2\ 5\ 4)(1\ 2\ 7)(3\ 6\ 8)(5\ 2\ 6\ 9) \in S_9$.

א. חשבו את σ^{2021} ואת $o(\sigma)$.

ב. חשבו את סדר המְרַכֵּז של σ.
(תזכורת: לחבורה G ואיבר $a \in G$, המְרַכֵּז של a הוא $C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$.)

ג. נתבונן בפעולה של החבורה $\langle\sigma\rangle$ על הקבוצה $\{1, \ldots, 9\}$ לפי $\tau * i = \tau(i)$ לכל $\tau \in \langle\sigma\rangle$. כמה מסלולים יש בפעולה? מי האיברים של החבורה שפועלים טריוויאלית (בפרט האם הפעולה נאמנה)? הוכיחו את תשובותיכם.

פתרון.

א. ראשית, נכתוב את σ כמכפלת מחזורים זרים:

$$\sigma = (1\ 5\ 7)(2\ 8\ 3\ 6\ 9\ 4).$$

כדי לחשב את $o(\sigma)$, נזכור כי הסדר של מכפלת מחזורים זרים הוא ה- lcm של האורכים שלהם; לכן $o(\sigma) = [3, 6] = 6$.
נותר לחשב את σ^{2021}. נשים לב כי

$$\sigma^{2021} = \sigma^{2016+5} = \sigma^{2016} \cdot \sigma^5 = (\sigma^6)^{336} \cdot \sigma^5 = \mathrm{id} \cdot \sigma^5 = \sigma^5$$

ואת σ^5 אפשר לחשב ישירות, כיוון שהצגנו את σ כמכפלת מחזורים זרים. אפשר גם לחסוך קצת עבודה; כיוון ש-$o(\sigma) = 6$, אז $\sigma^5 = \sigma^{-1}$, שיותר נוחה לחישוב ישיר:

$$\sigma^{2021} = \sigma^{-1} = (1\ 7\ 5)(2\ 4\ 9\ 6\ 3\ 8).$$

ב. נתבונן בפעולת ההצמדה של S_9 על עצמה. כפי שראינו בתרגול, תחת הפעולה הזו, המייצב של σ הוא בדיוק המְרַכֵּז של σ, והמסלול של σ הוא מחלקת הצמידות של σ. ממשפט מסלול-מייצב,

$$|C_{S_9}(\sigma)| = \frac{|S_9|}{|\mathrm{conj}(\sigma)|}\ .$$

לפי משפט מההרצאה, התמורות הצמודות ל-σ הן בדיוק התמורות עם אותו מבנה מחזורים, כלומר מהמבנה $(* * *)(* * * * * *)$. נחשב את כמות התמורות מהצורה הזו: יש $\binom{9}{3}$ אפשרויות לבחור את שלושת המספרים למחזור הראשון; לאחר מכן $(3-1)! = 2!$ דרכים לסדר אותן במחזור; ונותרו $(6-1)! = 5!$ דרכים לסדר את ששת המספרים האחרים במחזור השני. בסך הכל נקבל

$$|C_{S_9}(\sigma)| = \frac{|S_9|}{|\mathrm{conj}(\sigma)|} = \frac{9!}{\binom{9}{3} \cdot 2! \cdot 5!} = \frac{9!}{\frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 2! \cdot 5!} = 3 \cdot 6 = 18\ .$$

ג. נטען שבפעולה של $\langle\sigma\rangle$ על $\{1, \ldots, 9\}$ יש בדיוק שני מסלולים. אכן, i ו-j נמצאים באותו מסלול אם ורק אם יש איזושהי תמורה $\tau \in \langle\sigma\rangle$ שעבורה $\tau(i) = j$, כלומר אם ורק אם יש איזשהו k כך ש-$\sigma^k(i) = j$. החזקות של σ לעולם לא יאחדו בין המחזורים הזרים, ולכן האיברים $1, 5, 7$ לא יהיו באותו המסלול עם אף איבר מ-$2, 3, 4, 6, 8, 9$. מצד שני, קל לראות ש-$\{1, 5, 7\}$ הוא מסלול, ו-$\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ הוא מסלול גם כן. בפעולה של $\langle\sigma\rangle$ על $\{1, \ldots, 9\}$ האיבר היחיד שפועל טריוויאלית הוא id, כי הפעולה של S_9 על $\{1, \ldots, 9\}$ נאמנה כבר היא.

שאלה 3. (40 נק') בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פעולה של חבורה על קבוצה. מצאו מיהם המסלולים של הפעולה, וכתבו נציג מפורש לכל מסלול.

א. הפעולה של החבורה D_5 על עצמה על ידי הצמדה.

ב. יהי $n \geq 2$. החבורה S_n פועלת על $X = \{1, \ldots, n\}^2 = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ לפי $\sigma * (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$ לכל $\sigma \in S_n$ ולכל $(i, j) \in X$.

פתרון.

א. בתרגילי הבית ראינו את הגדלים של מחלקות הצמידות. נזכיר אותם: ממסקנה של משפט מסלול-מייצב, לכל $a \in D_5$ מתקיים $|\mathrm{conj}(a)| \mid |D_5| = 10$, ולכן

$$|\mathrm{conj}(a)| \in \{1, 2, 5, 10\}$$

בנוסף $\mathrm{conj}(\mathrm{id}) = \{\mathrm{id}\}$, ולכן יש לנו איבר עם מחלקת צמידות בגודל 1. כמו כן, $|\mathrm{conj}(a)| = 1$ אם ורק אם $a \in Z(D_5)$, שבתרגיל הבית הוכחתם שהוא טריוויאלי. כיוון שסכום כל מחלקות הצמידות חייב להיות $|D_5| = 10$, ויש לנו רק מחלקה אחת מגודל 1, הגדלים של מחלקות הצמידות חייבים להיות $10 = 1 + 2 + 2 + 5$.
נכתוב $D_5 = \left\langle \sigma, \tau \,\middle|\, \sigma^5 = \tau^2 = \mathrm{id}, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \right\rangle$, כש-$\sigma$ הוא סיבוב ב-$\frac{2\pi}{5}$ רדיאנים ו-τ הוא שיקוף ביחס לאיזשהו ציר סימטריה.

- נחשב את $\mathrm{conj}(\sigma)$. מהיחסים של D_5, $\sigma^4 = \sigma^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1} \in \mathrm{conj}(\sigma)$ (כי $\tau^2 = \mathrm{id}$). מצד שני, נטען כי אלו כל האיברים, כלומר $\mathrm{conj}(\sigma) = \left\{\sigma, \sigma^4\right\}$. אכן, $\langle\sigma\rangle \subseteq C_{D_5}(\sigma)$, ולכן $|C_{D_5}(\sigma)| \geq 5$. ממשפט מסלול-מייצב, נקבל שמתקיים $|\mathrm{conj}(\sigma)| = \frac{|D_5|}{|C_{D_5}(\sigma)|} \leq \frac{10}{5} = 2$, ולכן $\mathrm{conj}(\sigma) = \left\{\sigma, \sigma^4\right\}$.
- בדומה, $\mathrm{conj}(\sigma^2) = \left\{\sigma^2, \sigma^3\right\}$; אכן, $\tau\sigma^2\tau^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})^2 = (\sigma^4)^2 = \sigma^3$, וכיוון ש-$\langle\sigma\rangle \subseteq C_{D_5}(\sigma^2)$ נקבל שזו מחלקת צמידות בגודל 2.
- לפי גדלי המחלקות שחישבנו מראש, נקבל שכל שאר האיברים, כלומר כל האיברים בקבוצה$\left\{\tau\sigma^i \,\middle|\, 0 \leq i < 5\right\}$, נמצאים באותה מחלקת צמידות.

בסך הכל, מחלקות הצמידות הן $\{\mathrm{id}\}$, $\left\{\sigma, \sigma^4\right\}$, $\left\{\sigma^2, \sigma^3\right\}$ ו-$\left\{\tau\sigma^i \,\middle|\, 0 \leq i < 5\right\}$. הנציגים שלהן הם id, σ, σ^2 ו-τ, בהתאמה.

ב. נטען כי המסלולים הם $T_1 = \{(i, j) \in X \mid i = j\}$ ו-$T_2 = \{(i, j) \in X \mid i \neq j\}$. נעבוד בשלושה חלקים:

- לכל $(i, i), (j, j) \in T_1$ קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma * (i, i) = (j, j)$. אכן, אם $i = j$ נבחר $\sigma = \mathrm{id}$, ואחרת אפשר לבחור את החילוף $\sigma = (i\ j)$ ולקבל $\sigma * (i, i) = (j, j)$. זה מראה שכל איברי T_1 נמצאים באותו המסלול.
- לכל $(i, j), (k, l) \in T_2$ קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma * (i, j) = (k, l)$. כלומר, מחפשים תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$(\sigma(i), \sigma(j)) = (k, l)$. אבל בהכרח קיימת תמורה כזו; אפשר להגדיר תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = l$, ואת שאר האיברים נסדר באיזושהי תמורה. אז נקבל שבאמת $\sigma * (i, j) = (k, l)$.
(אם נשתמש במושג שהופיע בתרגיל הבית, הפעולה של S_n על $\{1, \ldots, n\}$ היא 2-טרנזיטיבית)
- לכל $(i, i) \in T_1$ ו-$(j, k) \in T_2$, אין תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma * (i, i) = (j, k)$. אבל זה ברור, כי $\sigma * (i, i) = (\sigma(i), \sigma(i))$ הוא זוג שבו שני האיברים שווים, ולכן לא יכול להיות שווה ל-(j, k).

נציגים מפורשים הם $(1, 1)$ עבור T_1 ו-$(1, 2)$ עבור T_2.