מקליד: עידן אריה
מרצה: ד"ר אורן קאפח
תאריך: 2019-03-06

גרפיקה ממוחשבת
89-663-01

הבסיס המתמטי - חזרה על אלגברה לינארית

יחידות

סקלר	גודל בודד
נקודה	מקום במרחב. ניתן לייצג אותה בהרבה צורות - בד"כ נייצג אותה יחסית למערכת צירים כלשהי.
וקטור	כיוון וגודל. אין לו מיקום ספציפי. כדי לשים אותם במקום מסויים במרחב צריך לקבע נקודה מסויימת.

פעולות

- כפל וקטור v בסקלר α - מקבלים וקטור באותו כיוון שגודלו פי α:

  $$|\alpha \cdot v| = |\alpha| \cdot |v|$$

  אם $\alpha < 0$ כיוון הווקטור יתהפך ב$180°$

- חיבור נקודה Q ווקטור v - נותן נקודה:

  $$P = Q + v$$

  חיסור נקודות - נותן וקטור:

  $$v = P - Q$$

  אם Q היא ראשית הצירים אז $P = v$ (מבחינת הייצוג)

- חיבור/חיסור וקטורים נותן וקטור. בחיבור מחברים ראש לזנב.

- קומבינציה לינארית של וקטורים:

  $$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

  - אם $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$ אז זה נקרא *Affine Combination*. לדוגמה:

    $$w = (1-t)\, v_1 + t v_2 = v_1 + t\,(v_1 - v_2)$$

    מקבלים וקטור שמסתיים על הקו שמחבר בין הראשים של v_1 וv_2.
  - אם כל המקדמים חיוביים $\alpha_i \geq 0, i = 1 \dots m$ אז זה נקרא *Conves Combination* - אנחנו לא חורגים מ"גבולות הגיזרה" של הווקטורים.

- מכפלה סקלרית *Dot Product*: כפל איבר איבר וחיבור - נותן סקלר, שהוא מכפלת הגדלים כפול קוסינוס הזווית ביניהם:

  $$v \cdot u = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \cdots + v_n \cdot u_n = |v|\,|u| \cos\theta$$

- אם רוצים למצוא את הגודל של וקטור, עושים dot product עם עצמו ומוציאים שורש:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

- אם רוצים לנרמל וקטור, מחלקים בגודל:

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{v}{\sqrt{v \cdot v}}$$

- אם רוצים למצוא את הזווית בין שני וקטורים, מחלקים את הdot product במכפלת הגדלים ועושים arccos:

$$\theta = \arccos \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

- הטלה - אם רוצים למצוא את ההטלה של v על u - כלומר האנך שמורידים מv לu -

$$\text{proj} = (v \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} \cdot u$$

(אינטואיציה - אם $u = \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ציר הx), אז $v \cdot u = v_x \cdot 1 + v_2 \cdot 0 = v_x$)

- מכפלה וקטורית *Cross Product*: נותן וקטור:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (-1)^0 \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{x} + (-1)^1 \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \hat{y} + (-1)^2 \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

הוקטור $u \times v$ יהיה מאונך לu ולv, ויתקיים $|u \times v| = |u| \cdot |v|$

ייצוג במרחב תלת מימדי

בשביל לייצג נקודה במרחב, צריך בסיס - 3 וקטורים v_1, v_2, v_3.

- אם הווקטורים מאונכים - כלומר $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_3$ - אז הבסיס נקרא אורתוגונלי.
- אם בנוסף $|v_1| = |v_2| = |v_3|$ - אז הבסיס נקרא אורתונורמלי.
- אם מתקיים $v_1 \times v_2 = v_3$, אז הבסיס מקיים את כלל יד ימין.

כדי לייצג נקודה צריך את שלושת ווקטורים הבסיס - ואת נקודת ראשית הצירים.

פעולות וקטוריות בבסיס אורתונורמלי

- כפל בסקלר:

$$\alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta_1 \\ \alpha\beta_2 \\ \alpha\beta_3 \end{pmatrix}$$

- חיבור/חיסור:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 \pm \beta_2 \\ \alpha_3 \pm \beta_3 \end{pmatrix}$$

- מכפלה סקלרית:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

- מכפלה וקטורית:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y \\ \alpha_z\beta_x - \alpha_x\beta_z \\ \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x \end{pmatrix}$$

מישור פרמטרי

מישור מוגדר ע"י 3 נקודות P, Q, R. הקו PQ הוא affine combination של P ו-Q, והמישור PQR הוא affine combination של P, Q ו-R. אם הצירוף הוא convex אז מקבלים נקודה בתוך המשולש Δ_{PQR}.

מקליד: עידן אריה
מרצה: ד"ר אורן קאפח
תאריך: 2019-03-06

טרנספורמציות בדו־מימד

לפני שמדברים על טרנספורמציות, צריך לדבר על איך מייצגים את האובייקטים. המרחב שלנו הוא מישור, ולכן הייצוג יהיה דו־מימדי. האובייקטים שלנו פשוטים ־ יש לנו קודקודים וline segments שמחברים ביניהם. את הטרנספורמציה נעשה על הקודקודים, וזה כבר יזיז לנו את כל האובייקט.

- הזזה:

$$\text{Translate}\left(a,b\right): \qquad \left(x,y\right)\to\left(x+a,y+b\right)$$

- הגדלה:

$$\text{Scale}\left(a,b\right): \qquad \left(x,y\right)\to\left(ax,by\right)$$

נשים לב שאם מרכז האובייקט לא יהיה ב$(0,0)$ ההגדלה "תזיז" את האובייקט. אם נרצה לשמור על המרכז, נצטרך להזיז את האובייקט לראשית הצירים, לעשות Scale, ואז להזיז אותו חזרה.

- שיקוף: הגדלה מסוג $\text{Scale}\left(-1,1\right)$, $\text{Scale}\left(1,-1\right)$ או $\text{Scale}\left(-1,-1\right)$
- סיבוב (עם כיוון השעון):

$$\text{Rotate}\left(\theta\right): \qquad \left(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta\right)$$

כדי לייצר את הנוסחה הזאת צריך לזכור שניתן לייצג וקטור דו מימדי באמצעות מספר מרוכב $x+iy$, ובהצגה פולרית $r\sphericalangle\theta$. הכפלה של שני מספרים מרוכבים היא:

$$\left(r_1\sphericalangle\theta_1\right)\cdot\left(r_2\sphericalangle\theta_2\right)=r_1r_2\sphericalangle\theta_1\theta_2$$

כלומר אם $r_2=1$ אז ההכפלה מסובבת בθ_2. ובהצגה קרטזית:

$$\left(x+iy\right)\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=x\cos\theta-iy\sin\theta+i\left(x\sin\theta+y\sin\theta\right)$$

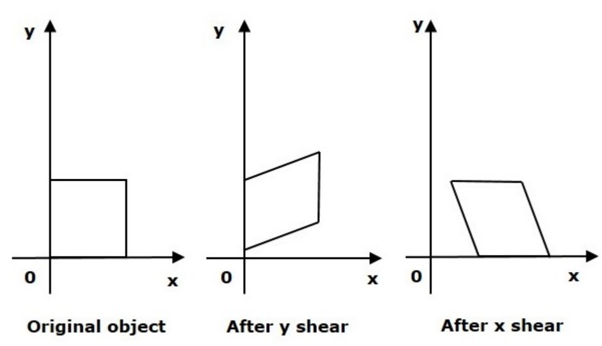
רגע! זה לא מה שקיבלנו!

הבעיה היא שהסיבוב עם המספרים המרוכבים הוא נגד כיוון השעון ־ ואנחנו רצינו עם כיוון השעון. אז עם משתמשים ב$-\theta$ מקבלים את הנוסחה הנכונה.

- Shear:

$$\text{Shear}\left(a,b\right): \qquad \left(x,y\right)\to\left(x+ay,y+bx\right)$$

הx זז כפונציה של הy, והy זז כפונקציה של הx. שומר על מקביליות.



תכונות של טרנספורמציות

- Rigid: הזזה + סיבוב (שומר על מרחקים)
- Similarity: הזזה + סיבוב + שינוי גודל
- Affine: הזזה + סיבוב +שינוי גודל + Shear (שומר על דמיון)

טרנספורמציות באמצעות מטריצות

נתייחס לנקודה (x, y) בתור מטריצה 2×1 (וקטור עמודה): $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. נבצע את הפעולות באמצעות כפל מטריצות:

- שינוי גודל:

$$\text{Scale}\left(a, b\right): \qquad (x, y) \to (ax, by)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$$

וההופכי:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- שיקוף: משתמשים במטריצת שיקוף:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Shear:

$$\text{Shear}\left(a, b\right): \qquad (x, y) \to (x + ay, y + bx)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y + bx \end{bmatrix}$$

- סיבוב:

$$\text{Rotate}\left(\theta\right): \qquad (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos\theta + y \sin\theta \\ -x \sin\theta + y \cos\theta \end{bmatrix}$$

למה בכלל להשתמש במטריצות? כי אנחנו יכולים להרכיב פעולות, ואז את אותה פעולה לבצע על כל הקודקודים. ככה במקום סיבוכיות של כמות הפעולות **כפול** כמות הקודקודים, נקבל סיבוכיות של כמות הפעולות **ועוד** כמות הקודקודים.

נשים לב שהפעולה של כפל מטריצות היא אסוציאטיבית אבל לא קומוטטיבית. לכן סדר הפעולות משנה.

הזזה - קואורדינטות הומוגניות

הזזה אי אפשר לעשות עם כפל מטריצות. לכן נשתמש בקואורדינטות הומוגניות - במקום להישאר בדו מימד נעלה את המימד של המטריצות ושל הוקטורים מR^n לR^{n+1}:

$$(x,y)\to(X,Y,W)=(tx,ty,t)$$

לדוגמה - $(2,3,1)\sim(6,9,3)$. אפשר לנרמל באמצעות $(X,Y,W)\to\left(\frac{X}{W},\frac{Y}{W}\right)$.
עכשיו אפשר להגדיר $\text{Translate}\,(a,b)$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\y+b\\1\end{bmatrix}$$

דוגמה - סיבוב סביב נקודה

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & x_0\\0 & 1 & y_0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\0 & 1 & -y_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & x_0\left(1-\cos\theta+y_0\sin\theta\right)\\\sin\theta & \cos\theta & y_0\left(1-\cos\theta\right)-x_0\sin\theta\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

שינוי ייצוג (שינוי קואורדינטות)

יש לנו אובייקט שמייוצג באמצעות מערכת קואורדינטות x,y, ונרצה לשנות אותו למערכת קואורדינטות אחרת x',y'. זה כמו לקחת את מערכת הצירים החדשה ולעשות לה טרנספורמציה שתשים אותה על המערכת הישנה. כלומר - אם ראשית הצירים של מערכת הצירים החדשה היא (x_0,y_0) (בקואורדינטות של המערכת הישנה) והיא מסובבת בθ לעומת המערכת הישנה, את הטרנספורמציה:

$$M=R^{-1}T^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\0 & 1 & -y_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

לחלופין - נקבל את מטריצת הסיבוב ע"י כך שנשים את הווקטורים u וv - בסיסי המערכת החדשה לפי המערכת הישנה - בצורה אופקית:

$$M=\begin{bmatrix}u_x & u_y & 0\\v_x & v_y & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\0 & 1 & -y_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

למה זה עובד? כי

$$u_x=\cos\theta \qquad u_y=\sin\theta$$

$$v_x=\sin\theta \qquad v_y=\sin\theta$$

דוגמה

אם יש לנו את הנקודה $P = (u_x, u_y)$ - כלומר את הציר המיוצג ע"י v - אנחנו אמורים לקבל $MP = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$MP = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x u_x + u_y u_y \\ u_x v_x + u_y v_y \\ 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

דוגמה - שיקוף סביב ציר

נגדיר מערכת צירים שבה אחד הצירים הוא הציר שעליו אחנו רוצים לשקף:

$$u = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_{1x} \\ 0 & 1 & P_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_{1x} \\ 0 & 1 & -P_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$