$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 10\cdot\cos(135) \\ 10\cdot\cos(45) \\ 0 \end{pmatrix} = 5\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega} = 4Ma^2\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} 5\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 20\sqrt{2}Ma^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{J}| = 20\sqrt{2}Ma^2$$

הרצאה 13

טנזור מומנט אינרציה:

$$I_{ik} = \sum_\lambda m_\lambda \left(\sum_{l=1}^{3} \rho_{x_l}^{(\lambda)} \delta_{ik} - \rho_{x_i}^{(\lambda)} \rho_{x_k}^{(\lambda)}\right)$$

$$I_{ik} = \int_{\text{נפח}} \gamma(\rho_{x_1}, \rho_{x_2}, \rho_{x_3}) \left(\sum_{i=1}^{3} \rho_{x_l}^2 \delta_{ik} - \rho_{x_i}\rho_{x_k}\right) d\rho_{x_1} d\rho_{x_2} d\rho_{x_3}$$ כש γ צפיפות

[דיבלים בהמשך בצמן.] נבחר מערכת צירים ראשית principal axes $\{x_i\}_{i=1}^{3}$ מ"ג כלומר

האנרגיה הקינטית

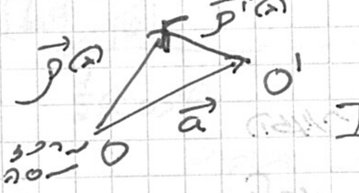
$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{11}\Omega_{x_1}^2 + \frac{1}{2}I_{22}\Omega_{x_2}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\Omega_{x_3}^2$$

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\hat{I}\cdot\vec{\Omega}$$

נניח שאנו יודעים לחשב הטנזור

$$I'_{ik} = \sum_\lambda m_\lambda \left(\delta_{ik}\sum_l \rho'^{(\lambda)2}_{x_l} - \rho'^{(\lambda)}_{x_i}\rho'^{(\lambda)}_{x_k}\right)$$

שהוא טנזור המחושב ביחס לראשית O'



$$\vec{\rho}^{(\lambda)} = \vec{\rho}'^{(\lambda)} + \vec{a}$$

$$I'_{ik} = \sum_\lambda m_\lambda \left(\delta_{ik}\sum_l (\rho_{x_l}^{(\lambda)} - a_{x_l})^2 - [\rho_{x_i}^{(\lambda)} - a_{x_i}][\rho_{x_k}^{(\lambda)} - a_{x_k}]\right)$$

$$\sum_\lambda m_\lambda\left(\delta_{ik}\sum_l \rho_{x_l}^{2(\lambda)} - 2\sum_l \rho_{x_l} a_{x_l} + \sum_l a_{x_l}^2\right)$$

$$-\rho_{x_i}\rho_{x_k}(\lambda) - a_{x_i}a_{x_k} + \rho_{x_i}(\lambda)a_{x_k} + \rho_{x_k}^{(\lambda)}a_{x_i}$$

לכן

$$I'_{ik} = I_{ik} + \sum_\lambda m_\lambda \delta_{ik}\left(\sum_l a_{x_l}^2 \underbrace{- 2\sum_l \rho_{x_l} a_{x_l}}_{1}\right.$$

$$\left. - a_{x_i}a_{x_k} \underbrace{+ \rho_{x_i}^{(\lambda)}a_{x_k}}_{2} \underbrace{+ \rho_{x_l}^{(\lambda)}a_{x_i}}_{3}\right)$$

מרכז מסה במערכת מרכז מסה

$$1)\ \sum_\lambda m_\lambda\delta_{ik}\left(-2\sum \rho_{x_l}a_{x_l}\right) = -2\delta_{ik}\sum_l a_{x_l}\sum_\lambda m_\lambda \rho_{x_l}^{(\lambda)} = 0$$

2) ⟵ ס

3) ⟵ ט

באופן דומה

ועכשיו נקבל את משפט שטיינר

$$\boxed{\begin{aligned} I'_{ik} &= I_{ik} + \sum_\gamma m_\gamma \left(\delta_{ik}\sum_l a_{x_l}^2 - a_{x_i}a_{x_k}\right) \\ &= I_{ik} + M\left(\delta_{ik}\sum_l a_{x_l}^2 - a_{x_i}a_{x_k}\right) \end{aligned}}$$

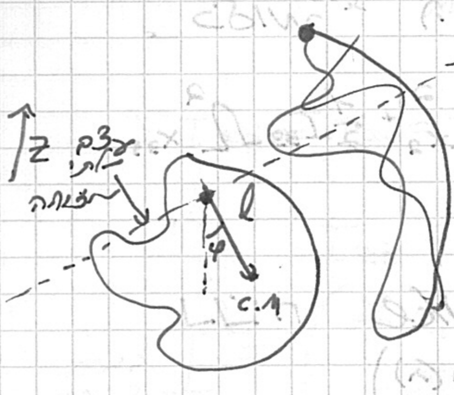
$I_1 = I_{11},\ I_2 = I_{22},\ I_3 = I_{33}$

$I_1 = I_2 = I_3 \leftarrow$ סביבון כדורי

$I_1 = I_2 \neq I_3 \leftarrow$ סביבון סימטרי.

<u>דוגמה 1:</u> מטוטלת פיזיקלית

מצאו את תדירות התנודות הקטנות של המטוטלת.



$\downarrow g$

$$U = \sum_\gamma m_\gamma z^{(\gamma)} g = g\sum_\gamma m_\gamma z^{(\gamma)}$$

$$gM\left(\text{מיקום בציר } z \text{ של מרכז המסה}\right)$$

$$U = \cancel{Mgl(1-\cos\varphi)}\ -Mgl\cos\varphi$$

$$T = \left(\text{מרכז מסה}\right) + \left(\text{סיבוב}\right)$$

$\dot\varphi \leftarrow$ מהירות זוויתית

הזוויות בין הציר של $\dot\varphi$ בין הצירים הראשיים הן: α, β, γ

ולכן

$$(\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, \Omega_{x_3})$$
$$(\dot\varphi\cos\alpha, \dot\varphi\cos\beta, \dot\varphi\cos\gamma)$$

$$T = \frac{1}{2}M(l\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_{x_1}^2 + I_2\Omega_{x_2}^2 + I_3\Omega_{x_3}^2\right)$$

הישנות של מסה נק.

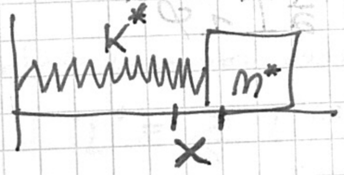
$$= \frac{1}{2}M(l\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}\left(I_1\dot\varphi^2\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta\,\dot\varphi^2 + I_3\cos^2\gamma\,\dot\varphi^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\left[Ml^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma\right]\dot\varphi^2 + Mgl\cos\varphi$$

$$\cos\varphi \approx \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right)$$

$$L=\frac{1}{2}\left[Ml^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma\right]\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}Mgl\varphi^2$$

אבל זה בדיוק דומה לאוסילטור הרמוני



$$\omega=\sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

$$L=\frac{1}{2}m^*\dot{x}^2-\frac{1}{2}k^*x^2$$

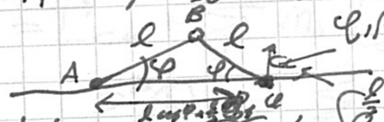
$$\Downarrow$$

$$\omega^2=\frac{\frac{1}{2}k^*}{\frac{1}{2}m^*}=\frac{k^*}{m^*}$$

ובהצבה למקרה שלנו

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{[ml^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma]}}$$

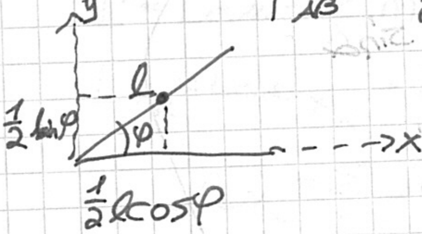
<u>דוגמה 2:</u> שני מוטות בעלי אורך l ומסה m מחוברים בעזרת גלגלת חסרת מסה והמוט השמאלי מחובר בקצהו השמאלי.



חשבו את האנרגיה הקינטית של מערכת זו.

$$\measuredangle CAB=\varphi$$

$$T_{AB}=\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}_{cm}^2=\frac{1}{2}\left(-\frac{l\sin\varphi}{2}\dot{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{l\cos\varphi}{2}\dot{\varphi}\right)^2$$



$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2$$

$$\text{אנרגיה קינטית סיבובית}\longrightarrow\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

כי ניקח רק את ציר ה-z ואז נשאר את המהירות של הגוף רק על φ כי רק בציר הזה הוא מסתובב לכן הרכיבים של x_1 ו-x_2 שווים ל-0 של המהירות הזוויתית של הגוף.

$\{x_1,x_2,x_3\}=\{\varphi,x_1,x_2\}$ והמרחק אורתוגונלים ל-φ.

$$T_{AB}=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

$$T_{BC}=T_{\text{מ.מ}}+T_{\text{סיבוב}}$$

$$T_{\text{מ.מ}}=\frac{1}{2}M\dot{x}_{cm}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}_{cm}$$

$$T_{\text{מ.מ}}=\frac{1}{2}M\left(-\frac{3}{2}l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}M\left(\frac{9}{4}l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}M\frac{l^2}{4}\left(8\sin^2\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} (1 + 8 \sin^2\varphi) \dot\varphi^2$$

$\frac{\pi}{2} - \varphi$

$$T_{\text{סיבוב}} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\pi - \varphi})^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot\varphi^2$$

$$T_{BC} = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} (1 + 8 \sin^2\varphi) \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot\varphi^2$$

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{Ml^2}{3} (1 + 3 \sin^2\varphi) \dot\varphi^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} M l^2$$

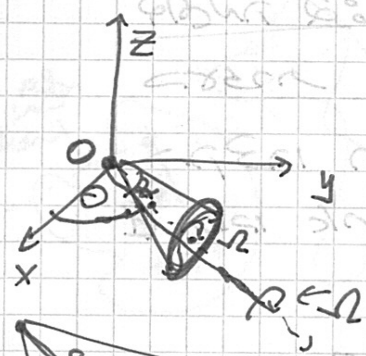
לגרנז'יאן

$$L = \frac{ml^2}{3} \left(1 + 3 \sin^2\varphi \, \dot\varphi^2\right) - mgl \sin\varphi$$

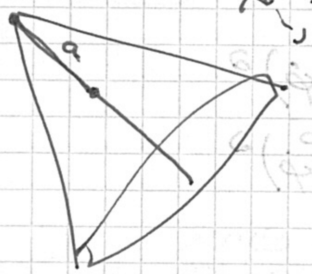
הרצאה 14

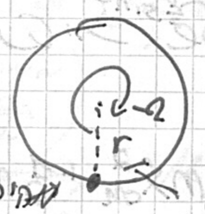
דוגמה 3

קונוס מתגלגל ללא החלקה על גבי משטח דו-מימדי כך שקדקד אחד שלו מקובע בראשית צירים כתוב את האנרגיה הקינטית של הקונוס.



$\Omega \leftarrow$ מהירות זוויתית של גלגול.





מהירות בנקודת המגע שווה לאפס

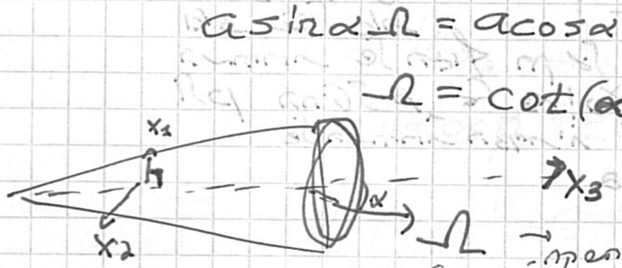
$$V - \Omega r = 0$$

$$V = a \sin\alpha \, \Omega$$

$$V = a \cos\alpha \, \dot\theta$$

$$a \sin\alpha \, \Omega = a \cos\alpha \, \dot\theta$$

$$\Omega = \cot(\alpha) \, \dot\theta$$



מקביל לציר ההחלקה

בגלל

$$\vec\Omega = (-\Omega \sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha)$$

$$T = \frac{1}{2} M (a \cos(\alpha) \dot\theta)^2 + \frac{1}{2} I_1 (\Omega \sin\alpha)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\Omega \cos\alpha)^2$$

אנרגיה קינטית של מרכז מסה.

אנרגיה קינטית סיבובית.

$$T = \frac{1}{2} M a^2 \cos^2\alpha \, \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_1 \cos^2\alpha \, \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_3 \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \dot\theta^2$$