פתרון תרגיל 4 / ליניארית להנדסה תש"ף

1 בדצמבר 2019

1. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות בדקו אם היא הפיכה. אם כן, מצאו את A^{-1} במפורש. אם לא, מצאו פתרון שונה מאפס למערכת ההומוגנית שהיא מייצגת (כלומר מצאו $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ כך ש־ $Ax = 0$).

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ב) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נדרג במקביל לדירוג היחידה:

א.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1+R_3\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו בסוף הדירוג את I, ולכן A הפיכה. ההופכית היא: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, וניתן גם לבדוק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

כבר כעת ניתן לראות ש־A לא הפיכה כי קיבלנו שורת אפסים. נמשיך עם דירוג A כדי למצוא פתרון שונה מאפס למערכת ההומוגנית המתאימה.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+0.5R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-0.25R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נסמן $z = t$ ונקבל $y = 0.25t, x = -1.5t$. התבקשנו למצוא פתרון אחד שונה מאפס, אז ניקח למשל את $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה. לאחר ביצוע הפעולות האלמנטריות הבאות התקבלה מטריצת היחידה:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$4R_1 + R_2 \to R_2$$

$$8R_3 \to R_3$$

(א) מצאו את A^{-1} באופן מפורש.

(ב) מצאו את A.

<u>פתרון:</u>

א. נפעיל את הפעולות האלה על I ונקבל את ההופכית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ולכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

ב. כדי למצוא את A נעשה את הפעולות ההפוכות לפעולות הנ"ל בסדר הפוך על I (שזה שקול לדירוג A^{-1}):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

ולכן $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

3. תהי $0 \neq A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו: A לא הפיכה אם ורק אם היא מחלקת אפס (כלומר, קיימת $B \neq 0$ כך ש־ $AB = 0$).

פתרון:

$\Rightarrow$: נניח A מחלקת אפס ונראה שהיא לא הפיכה. נניח בשלילה שכן. מהעובדה שהיא מחלקת אפס נקבל שקיימת $B \neq 0$ כך ש־ $AB = 0$, ומהעובדה שהיא הפיכה (ההנחה בשלילה) נקבל שקיימת A^{-1} כך ש $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. לכן נקבל:

$$B = IB = A^{-1}AB = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

בסתירה לכך ש־ $B \neq 0$.

$\Leftarrow$: נניח ש־A לא הפיכה ונראה שהיא מחלקת אפס. לפי משפט (ושאלה 1 סעיף ב מהווה דוגמא לעניין) כיון שA לא הפיכה אז למערכת ההומוגנית המתאימה יש פתרון שונה מאפס, נסמנו v. ניקח את המטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המוגדרת ע"י: $\forall 1 \leq i \leq n : C_i(B) = v$, כלומר, כל עמודותיה הן הוקטור v הנ"ל. כיון ש־ $v \neq 0$, נקבל $B \neq 0$. לפי כפל עמודה נקבל: $\forall 1 \leq i \leq n : C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = Av = 0$, ולכן $AB = 0$ ו־A מחלקת אפס.

4. תהי A מטריצה ריבועית המקיימת:

$$3A^2 + 3A^4 - 5A^5 - A^{10} + 5I = 0$$

(א) הוכיחו: A הפיכה.

(ב) מצאו את ההופכית A^{-1} (כתלות במטריצה A).

פתרון:

א. נעביר את $5I$ אגף ונוציא את A כגורם משותף ונקבל: $A(3A + 3A^3 - 5A^4 - A^9) = -5I$. כמובן שהמטריצה $-5I$ הפיכה, וקיבלנו שמכפלה מסויימת הפיכה, ולכן שתי המוכפלות הפיכות. A היא אחת המוכפלות אז היא הפיכה.

ב. כדי לראות את I מצד ימין, צריך לכפול את שני האגפים בסקלאר $-\frac{1}{5}$, ולכן נקבל: $A \cdot \left(-\frac{1}{5}(3A + 3A^3 - 5A^4 - A^9)\right) = I$, ולכן $A^{-1} = -\frac{1}{5}(3A + 3A^3 - 5A^4 - A^9)$.

5. תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $A + A^2$ הפיכה אז A^2 הפיכה.

(ב) אם A הפיכה אז $A + A^2$ הפיכה.

(ג) אם $A = A^2$ אז $A = I$ או A איננה הפיכה.

(ד) אם ב־A יש עמודות אפסים אז A איננה הפיכה.

פתרון:

א. הוכחה: מתקיים $A + A^2 = A(A+I)$ וראינו שאם מכפלת מטריצות היא הפיכה אז כל אחת מהמטריצות הפיכה. לכן A הפיכה. מכפלת הפיכות היא הפיכה ולכן גם A^2 הפיכה.

ב. הפרכה: ניקח $A = -I$ שהיא הפיכה. נקבל ש־$A^2 = I$ ולכן $A + A^2 = 0$ לא הפיכה.

ג. הוכחה: נניח $A^2 = A$. אם $A = I$ סיימנו. אחרת (כלומר, $A \neq I$) נקבל ש־ $0 = A - A = A^2 - A = A(A - I)$, וכיון ש־$A - I \neq 0$ נובע ש־A מחלקת אפס ולכן לא הפיכה.

ד. הוכחה: נניח בשלילה שהיא הפיכה ונניח שעמודת האפסים היא i. אזי קיימת מטריצה B כך ש־ $BA = I$. לפי כפל עמודה עמודה נקבל

$$C_i(BA) = C_i(I)$$

$$\Downarrow$$

$$BC_i(A) = e_i$$

$$\Downarrow$$

$$0 = B \cdot 0 = e_i$$

בסתירה לכך שיש 1 במיקום ה־i של e_i (לפי הגדרה).

6. נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

האם המטריצה $A \cdot A^t$ הפיכה? הוכיחו את קביעתכם.

פתרון:

המטריצה AA^t לא הפיכה. הוכחה: מספיק להוכיח שיש בה שורת אפסים. ואכן:

$$R_4(AA^t) = R_4(A) \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מש"ל.

בהצלחה!