3

נגזרת של פונקציה מרוכבת ומשוואות קושי רימן

קושי רימן: אומרים שפונקציה מרוכבת f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{C}$ אם קיים הגבול

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

כאשר h הוא מספר מרוכב.

דוגמא: הראו שהפונקציה $f(z)=|z|$ אינה גזירה בשום נקודה. פתרון: נניח תחילה ש- $z\neq 0$ ואז

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|-|z|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h(|z+h|+|z|)}$$

נכתוב את $z=x+iy$ ו- $h=a+ib$ אז נקבל

$$\lim_{a,b\to 0}\frac{(x+a)^2+(y+b)^2-x^2-y^2}{(a+ib)(|x+a+i(y+b)|+|x+iy|)}$$

$$=\lim_{a,b\to 0}\frac{2ax+2by+a^2+b^2}{(a+ib)(|x+a+i(y+b)|+|x+iy|)}$$

נבחר ונקח $b=0$ נקבל

$$\lim_{a\to 0}\frac{2ax+a^2}{a(|x+a+iy|+|x+iy|)}=\frac{2x}{2|x+iy|}$$

באותו אופן ניקח $a=0$ נקבל $\frac{2y}{2i|x+iy|}$

לכן $\frac{x}{|x+iy|}=\frac{y}{i|x+iy|}$ אז $x=-iy$ וזה כאשר $x=y=0$

בסתירה לכך ש- $z\neq 0$. כעת $z=0$ נקבל

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & h>0 \text{ ממשי} \\ -1 & h<0 \text{ ממשי}\end{cases}$$

משפט: יהי f פונקציה גזירה בנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$ ו- $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ אז u ו-v הן בעלות נגזרות חלקיות בנקודה (x_0, y_0) ונגזרותיהן החלקיות מקיימות את משוואות קושי-רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ובכיוון ההפוך, אם u ו-v הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0, y_0) ומקיימות שם את משוואות קושי רימן אז f גזירה בנקודה $z = x_0 + iy_0$ ונגזרתה היא

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

דוגמה: נראה ש- $f(z) = \cos z$ היא פונ' גזירה בכל נקודה. פתרון:

$$\cos(z) = \cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

לכן $u(x,y) = \cos x\cosh y$, $v(x,y) = -\sin x\sinh y$.

u ו-v גזירות ברציפות ו-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x\cosh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x\sinh y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x\sinh y$$

לכן u ו-v מקיימות את משוואות קושי רימן ו- $\cos$ גזירה לכל z

(5) הוכחה: תהי f פונקציה אנליטית (גזירה) ב-D ונניח שהחלק הממשי u של f הוא פונקציה קבועה, הראו ש-f קבועה.

פתרון: לפי משוואות קושי רימן מתקיים

$$0=\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

לכן הנגזרות החלקיות של V מתאפסות ב-$\mathbb{R}^2$ ולכן V היא פונקציה קבועה.

הוכחה הראו שאם f אנליטית ו-$|f|$ קבועה אז f קבועה. פתרון: אם $f=u+iv$ אז $|f|^2=u^2+v^2$ ולכן u^2+v^2 היא פונקציה קבועה ולכן הנגזרות החלקיות שלה מתאפסות כלומר

$$0=\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2) = 2uu_x + 2vv_x$$

$$0=\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2) = 2uu_y + 2vv_y$$

ממשוואות קושי-רימן נקבל את המערכת

$$u \cdot u_x - v u_y = 0$$
$$u u_y + v u_x = 0$$

או בצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה היא u^2+v^2, אם $u^2+v^2 \neq 0$ אז הדטרמיננטה של המטריצה שונה מאפס ולכן יש פתרון יחיד $u_x=u_y=0$, ולכן u קבועה ולכן גם v קבועה. אם $u^2+v^2=0$ אז בהכרח $u=v=0$. לכן בשני המקרים מקבלים ש-f פונ' קבועה.

(6) שאלה: מצאו באילו נקודות הפונקציה
$f(x+iy)=(x-1)^2+iy^2$ גזירה.

פתרון: לפי משוואות קושי רימן צריך להתקיים

$$2(x-1)=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2y \,,$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \,, \text{ ולכן } x-1=y.$$

ו-f לא אנליטית בשום נקודה.

שאלה: נניח כי f היא פונק' גזירה בע"מ $|z|<R$. הוכיחו שגם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם.

פתרון: אם f נתונה לפי
$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז

$$f(\bar{z})=f(x,-y)=u(x,-y)+iv(x,-y)$$

ולכן

$$\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$$

נבדוק שהפונקציות $\varphi(x,y)=u(x,-y)$ ו- $\psi(x,y)=-v(x,-y)$ מקיימות את משוואות קושי-רימן (בהנחה ש-u ו-v מקיימות את משוואות קושי-רימן)

ולכן

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}u(x,-y)=\partial_1 u(x,-y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}v(x,-y)=\partial_2 v(x,-y)$$

כיוון ש-u ו-v מקיימות את משוואות קושי רימן מתקיים $\partial_1 u(x,-y)=\partial_2 v(x,-y)$

6

ולכן $\frac{\partial}{\partial x}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)$

כעת נבדוק את המשוואות הנ"ל

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,-y) = -\partial_2 u(x,-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}V(x,-y) = -\partial_1 V(x,-y)$$

כיון ש-u ו-V מקיימות את משוואות קושי ר'מן מתקיים $\partial_2 u(x,-y) = -\partial_1 V(x,-y)$ ולכן

$-\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y)$, ולכן P ו-$\Phi$ מקיימות את משוואות קושי-רימן.