

פיסיקה למתמטיקאים 88-320 מבחן מועד א' סמסטר ב' תשע"א

משך המבחן: שעתיים וחצי. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5). סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. מטוטלת נקודתית בעלת מסה m תלויה על חוט חסר מסה באורך R . נגדיר קואורדינטות $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ כך שמתקיים:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta$$

המטוטלת נתונה בפוטנציאל גריבטציוני $U = -mgz$ (ציר ה- z נבחר כמצביע כלפי מטה).

(א) מהן משוואות התנועה?

(ב) מהי הקואורדינטה הציקלית ומהו הגודל הנשמר?

(ג) נתון כי התנע הזוויתי בכיוון z מקיים $L_z = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = l$ (עבור קבוע מסויים l). מצאו את נקודות השבת ב- θ כפונקציה של R, l, g . האם הן יציבות?

2. שטח פנים מינימלי. נניח שיוצרים משטח על ידי סבוב של עקום המחבר שתי נקודות במישור xy סביב ציר y . מצאו את העקום עבורו שטח הפנים של המשטח מינימלי.

(א) רשמו את הלגרנג'יאן של הבעיה

(ב) רשמו את משוואת אוילר לגראנג' המתאימה

(ג) מצאו את העקום המבוקש

(רמז: שטח פנים של גוף סביב ציר y נתון ע"י
 $S = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx$

3. פונקצית הגל המנורמלת של חלקיק קוונטי היא $\psi(x) = ce^{-x^2}$

(א) מהו c ?

(ב) מהו $\langle p \rangle$?

(ג) מהו $\langle p^2 \rangle$?

(ד) נתון כי ההמילטוניאן הוא (אוסילטור הרמוני): $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ מהי ההסתברות למצוא את החלקיק ברמת היסוד?

4. נתון האופרטור הבא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים הנמדדים האפשריים עבור אופרטור זה?

(ב) מהם הוקטורים העצמיים (המנורמלים) של האופרטור?

(ג) חלקיק נמצא במצב

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מהי ההסתברות לקבל את הערך 6 במדידת הגודל הפיסיקלי הקשור ל- A ?

(ד) נתון שעבור אופרטור מסויים B מתקיים $[B, A] = 0$. איזה מהוקטורים שמצאתם בסעיף 4 הוא בהכרח וקטור עצמי של B . הוכיחו.

5. (בונוס - לא חובה) בזמן $T = 0$ חללית מתחילה להתרחק מכדור"א במהירות $\beta = 0.6$ ממהירות האור. בזמן $T = 1$ לפי שעון כדור הארץ מגלים בכדור הארץ כי אחד האסטרונוטים נשכח ושולחים אותו במעבורת מהירה אל החללית. המעבורת מגיעה אל החללית בזמן $T = 2$ לפי שעון החללית. מהי מהירות המעבורת יחסית לכדור הארץ?

נוסחאות שימושיות

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m\omega}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad \text{מצב היסוד של אוסילטור הרמוני:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \ln(2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}) + b$$

בהצלחה