תרגיל בית 6 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

יהי X מ"ט ותהי $A \subseteq X$. תהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת ע"י
$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. יהי $x \in X$.

א) הוכיחו שאם χ_A רציפה ב x אז $x \notin \partial(A)$.

ב) הוכיחו ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה ב - X.

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר
$\tau = \{A \subseteq X: x_0 \notin A\} \bigcup \{B \subseteq X : X \setminus B \text{ is finite}\}$.

א) הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.

ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגוחים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג) הראו: $cl(A) = \begin{cases} A & A \text{ is finite} \\ A \cup \{x_0\} & otherwise \end{cases}$.

ד) הראו: $int(A) = \begin{cases} A & X \setminus A \text{ is finite} \\ A \setminus \{x_0\} & otherwise \end{cases}$.

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ- A קבוצה צפופה.

הוכיחו $U \subseteq cl(A \cap U)$. הסיקו: $cl(U) = cl(A \cap U)$.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r)) = B[a,r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

<u>שאלה 5</u>

א. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}(\mathbb{Q}), cl(\mathbb{Q})$ (ב- $\mathbb{R}$).

ג. הוכיחו ש- $A:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

שאלה 6

תהיינה τ_1,τ_2 טופולוגיות על X כך ש- $\tau_1\subseteq\tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- (X,τ_1) $\Leftarrow$ F סגורה ב- (X,τ_2).

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}(A)$ את הפנים של A במרחב (X,τ_i) (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_2}(A)\subseteq\operatorname{int}_{\tau_1}(A)$, $cl_{\tau_2}(A)\supseteq cl_{\tau_1}(A)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R},T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$(0,1],(0,1),[0,1],[0,1)$.

בהצלחה!