תרגיל בית 9 – טופולוגיה

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו:

א. $\mathbb{Q}\cong\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

ב. $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)\cup\{0\}$.

שאלה 2

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הסיקו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

שאלה 3

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing$.

שאלה 4

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,\dots,A_n$ תת-מרחבים קומפקטיים של X. הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I}F_i$ קומפקטי.

שאלה 5

תהי $f:X\to Y$ פונקציה חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.

ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

<u>שאלה 6</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תת-מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$. הוכיחו ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \varnothing$.

תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

<u>שאלה 7</u>

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) אינו האוסדורף.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- X מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.

ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) קומפקטי.

בהצלחה!