תרגול 12 - פיתוח טיילור.

הגדרה: תהי $\alpha(x)$ פונקציה ממשית. (אומר כי $\alpha(x)$ היא $o(x^n)$ (במילים: או-קטן של x^n) בנק' $x=0$ אם

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^n} = 0$$

כלומר, $\alpha(x)$ מתקרבת ל-0 מהר יותר מ-x^n.

כמובן ניתן להגדיר: של $\alpha(x)$ היא $o(\beta(x))$ בנק' $c\in\mathbb{R}$ אם

$$\lim_{x\to c} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

משפט: (פיתוח טיילור עם שארית פאנו)

תהי f פונק' גזירה n פעמים בסביבה של הנק' a. ונניח x בסביבה זו אזי מתקיים

$$\underline{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right), \quad x\to a$$

$$\left(\lim_{x\to a} \frac{o\left((x-a)^n\right)}{(x-a)^n} = 0 \right)$$

הערה: שימו לב שלפעמים נפתח עד סדר n, אבל המקדם של $(x-a)^n$ יכול להתאפס.

תרגיל: פתחו את הפונקציה $f(x)=x+\sin x$ לפולינום טיילור מסדר 2 סביב הנק' $a=\pi$.

פתרון: $f'(x) = 1+\cos x$, $f''(x) = -\sin x$

3) צ"ל את הנק' דו'

$$f(\pi)=\pi$$
$$f'(\pi)=1+(-1)=0$$
$$f''(\pi)=0$$

עכשיו:

$$f(x)=f(\pi)+\underbrace{\frac{f'(\pi)}{1!}}_{=0}(x-\pi)+\underbrace{\frac{f''(\pi)}{2!}}_{=0}(x-\pi)^2+o\left((x-\pi)^2\right)$$

$$f(x)=\pi+o\left((x-\pi)^2\right)$$

(נפתח לשם התרגול עד סדר 3.

$$f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(\pi)=1$$

$$f(x)=\pi+\frac{1}{3!}(x-\pi)^3+o\left((x-\pi)^3\right)=\pi+\frac{1}{6}(x-\pi)^3+o\left((x-\pi)^3\right)$$

רשימה חלקית של פולינומי טיילור (סביב אפס)
(עקרונית גם פולינום מקלורן):

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$$

נזכיר את $\ln(1+x)$:

ננסה למצוא באופן כללי איך נראה $\ln^{(k)}(x+1)$:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$(\ln(1+x))'' = -1(1+x)^{-2} = \left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)$$

$$\ln^{(3)}(1+x) = 2(1+x)^{-3}$$

$$\ln^{(4)}(1+x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$$

באופן כללי:
$$\ln^{(k)}(1+x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(1+x)^{-k}$$

נציב $x=0$:
$$\boxed{\ln^{(k)}(1+0) = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(1)}$$

נקבל:
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{\ln^{(k)}(1+0)}}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$$

תרגיל: מצאו את $(e^{x^2})^{(m)}(0)$ לכל $\boxed{m}$ טבעי!

משפט: (יחידות הפיתוח של פולינום טיילור)
תהי f המקיימת $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^k)$
אז $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

פתרון: ידוע
$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$$

נציב $t=x^2$:
$$\boxed{(*)\ e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + \underbrace{o(x^{2n})}}$$

נוכיח שהשגיאה היא אכן $o(x^{2n})$.

(מין) $\lim_{t\to0}\frac{o(t^n)}{t^n}=0$ אחרי ההצבה $x^2=t$ אם $t \to 0$ אז
גם $x\to0$ ומקבלים $\lim_{x\to0}\frac{o(x^{2n})}{x^{2n}}=0$

ולכן פיתוח טיילור לפונקציה e^{x^2} הוא (*)
לפי יחידות הפיתוח. ולכן:

$$\boxed{(e^{x^2})^{(m)}}(0)=\begin{cases}0 & \text{אם } m \text{ אי-זוגי}\\ \frac{(2k)!}{k!} & \text{אם } m=2k \text{ זוגי} \quad (*)\end{cases}$$

$$e^{x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(e^{x^2})^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}+o(x^{2k})$$

(*) אם $m=2k$ זוגי אנחנו רוצים את המקדם x^{2k}

$$\frac{1}{k!}=\frac{(e^{x^2})^{(2k)}(0)}{(2k)!}$$

ולכן $$(e^{x^2})^{(2k)}(0)=\frac{(2k)!}{k!}$$

<u>משפט</u> (פיתוח טיילור עם שארית לגרנז')

תהי f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של a, ותהי x בסביבה זו. אזי
קיים c בין x ל-a כך ש

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+r_n(x)$$

כאשר
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$r_n(x)$ נקרא שארית לגרנז'.

<u>תרגיל</u>: (ממבחן)

השתמשו בקירוב לינארי על מנת לחשב את $\sqrt[3]{1006}$

<u>פתרון</u>: נפעיל את $f(x)=\sqrt[3]{x}$ סביב הנק'

$1000=10^3$. לפולינום טיילור מסדר 1.

$$f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(1000) = \frac{1}{300}$$

ולכן $f(1000)=10$

$$f(1006) = f(1000) + \frac{f'(1000)}{1!}(1006-1000) + r_n(x)$$

$$= 10 + \frac{1}{300}(1006-1000) + r_n(x)$$

ולכן הקירוב הוא:

$$f(1006) \sim 10 + \frac{6}{300} = 10.02$$

נחשב חסם לשגיאה: קיים $c \in (1000,1006)$

$$r_n(x) = \frac{f''(c)}{2!}(1006-1000)^2$$

$$f''(c) = \frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

ולכן
$$|r_n(x)| = \left|\frac{36 \cdot 2}{2 \cdot 9\sqrt[3]{c^5}}\right| = \left|\frac{4}{\sqrt[3]{c^5}}\right|$$

$$|r_n(x)| \le \left|\frac{4}{\sqrt[3]{1000^5}}\right| = \frac{4}{10^5} = 0.00004$$

תרגיל: חשבו את $\ln(1.03)$ בדיוק של 0.01.

נפתח את הפונקציה $\ln(1+x)$ סביב אפס.

$$\ln(1+0.03) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(0.03)^k + r_n(0.03)$$

כאשר קיים $c \in (0, 0.03)$ כך ש

$$r_n(0.03) = \frac{\ln^{(n+1)}(1+c)}{(n+1)!}(0.03)^{n+1}$$

חישבנו: $\ln^{(n+1)}(1+c) = (-1)^n n! (c+1)^{-n-1}$

לכן: $$|r_n(0.03)| = \left|\frac{n!(c+1)^{-n-1}}{(n+1)!} 0.03^{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(0.03)^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}\right| \underset{1+c>1}{\le} \frac{(0.03)^{n+1}}{n+1} \overset{?}{<} 0.01$$

ולכן מספיק $n=1$ כי $(0.03)^{n+1} \searrow 0$ כאשר n גדל

זאת הסדרה מונוטונית יורדת ועבור $n=1$ $\frac{(0.03)^2}{2} = \frac{9}{20000} < 0.01$

לכן זה מספיק.

כלומר:

$$\ln(1+0.03) \approx \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(0.03)^k \approx 0.03$$

כאשר

$$\left|\ln(1.03) - 0.03\right| \le 0.01$$

$$\le \frac{9}{20000}$$