מבוא לתורת החבורות תרגיל 5 תשע"ח.

1. כתבו את כל האיברים בA_4. האם A_4 אבלית? האם היא ציקלית?

$$A_4 = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,3,2),$$

$$(1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3)\}$$

החבורה אינה אבלית (ובפרט לא ציקלית) כי למשל

$$(1,3)(2,4) = (1,2,3)(1,2,4) \neq (1,2,4)(1,2,3) = (1,4)(2,3).$$

2. כתבו את כל הסדרים האפשריים בS_7.

$$\begin{cases} 1 & 1+...+1 \\ 6 & 6+1 \\ 5 & 5+1+1 \\ 4 & 4+1+1+1 \\ 3 & 3+1+1+1+1 \\ 2 & 2+1+...+1 \\ 10 & 5+2 \\ 12 & 4+3 \\ 4 & 4+2+1 \\ 3 & 3+3+1 \\ 6 & 3+2+2 \\ 6 & 3+2+1+1 \end{cases}$$

3. חשבו את הסימן של התמורות הבאות וקבעו אם הן זוגיות או אי־זוגיות:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) נפרק למחזורים זרים $(1253)(4)$ ולכן הסימן הוא $(-1)1 = -1$ והתמורה אי־זוגית.

i. בכתיב של מחזורים $(123\cdots 2n)$ האורך זוגי ולכן הסימן הוא -1 והתמורה זוגית.

4. תהי $H \leq G$ ת"ח. נגדיר יחס $g \sim g'$ אם $g = g'h$ $\exists h \in H$
הוכיחו כי זהו יחס שקילות.
הראו שמחלקות השקילות הן המחלקות $[g] = gH$ וקבוצת המנה היא G/H.
נראה סימטריות: אם קיים $h \in H$ כך ש $g = hg'$ אזי $g' = h^{-1}g$ ו$h^{-1} \in H$ כי זו ת"ח.

5. הוכיחו כי $\langle(1,1)\rangle \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הוא תת־חבורה מאינדקס אינסופי.
נראה ש $\{(0,n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ היא קבוצה אינסופית של קוסטים.
אם $(0,n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (0,m) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
זה אומר ש $(0,n) - (0,m) \in \langle(1,1)\rangle$
כלומר ש $(0, n-m) = (k,k)$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$.
כלומר $n = m \Leftarrow 0 = n - m$.

6. יהיו $H, K \leq G$ תת־חבורות כך ש $(|H|, |K|) = 1$ הוכיחו כי $H \cap K = \{e\}$.
יהי $x \in H \cap K$, אזי:
$x \in H$ ולכן לפי משפט לגרנז $o(x) \mid |H|$.
$x \in K$ ולכן לפי משפט לגרנז $o(x) \mid |K|$.
ולכן $x = e \Leftarrow o(x) = 1 \Leftarrow o(x) \mid (|H|, |K|) = 1$.

7. מצאו את שתי הספרות האחרונות של $2313^{199} + 8074$.
שתי הספרות האחרונות זה בעצם מודולו 100. לכן מחפשים $2313^{199} + 8074$ $\mod 100 = 2313^{199} \mod 100 + 8074 \mod 100 = 13^{199} \mod 100 + 74$
$\varphi(100) = 40$ ולכן $13^{200} = 13^{40\cdot 5} = (13^{40})^5 \equiv 1 \mod 100$.
נובע מכאן ש$13^{199} = 13^{-1}$. נחשב את 13^{-1} בעזרת אלגוריתם אוקלידס.

$$100 = 7 \cdot 13 + 9$$

$$13 = 1 \cdot 9 + 4$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

לכן $1 = 9-2\cdot4 = 9-2(13-9) = -2\cdot13+3\cdot9 = -2\cdot13+3(100-7\cdot13) =$ $-23 \cdot 13 + 3 \cdot 100$.

קיבלנו שההופכי של 13 הוא 23־ , כלומר, 77.

תשובה סופית: $77 + 74 \mod 100 = 151 \mod 100 = 51$.

8. תארו את הקוסטים השמאליים עבור תת החבורות הבאות:

   (א) $\langle 4 \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$

   (ב) $\langle (1,2,3) \rangle \leq S_3$

   (ג) עבור $G = \langle a \rangle$ מסדר 15, $\langle a^5 \rangle \leq G$

1. קבוצת המנה היא

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle 4 \rangle = \{\langle 4 \rangle, 1 + \langle 4 \rangle, 2 + \langle 4 \rangle, 3 + \langle 4 \rangle\}$$

(א) קבוצת המנה היא:

$$S_3/\langle (123) \rangle = \{\langle (123) \rangle, (12)\langle (123) \rangle\}$$

(ב) הסדר של התת־חבורה הוא $3 = \dfrac{15}{(15,5)} = o(a^5)$ ולכן האינדקס הוא $5 = \dfrac{15}{3}$ וקבוצת המנה היא $\{\langle a^5 \rangle, a\langle a^5 \rangle, a^2\langle a^5 \rangle, a^3\langle a^5 \rangle, a^4\langle a^5 \rangle\}$.