בוחן לינארית 2 סמסטר א תשפא

ענו על השאלות הבאות:

1. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & -8 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(א) מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$.

פתרון: נתחיל עם חישוב הפ"א

$$\begin{aligned}
p_A(x) = |xI - A| &= \left| \begin{pmatrix} x-1 & -3 & 6 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix} \right| \\
&\overset{[R_1-R_3]}{=} \left| \begin{pmatrix} x+2 & 0 & -x-2 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix} \right| \\
&= (x+2) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix} \right| \\
&\overset{[C_3+C_1]}{=} (x+2) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & x-2 & 4 \\ -3 & -3 & x+5 \end{pmatrix} \right| \\
&= (x+2) \left| \begin{pmatrix} x-2 & 4 \\ -3 & x+5 \end{pmatrix} \right| \\
&= (x+2)\left[(x-2)(x+5)+12\right] \\
&= (x+2)\left[x^2+3x+2\right] \\
&= (x+2)(x+2)(x+1)
\end{aligned}$$

ולכן $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ ע"ע של A. נחשב מ"ע
עבור $V_{-1} = N(A+I)$ נחשב

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1.5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} t \\ \frac{4}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $V_{-2}=N(A+2I)$ נחשב

$$A+2I=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 4 & 4 & -8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} 2t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid t,s\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו שיש 3 ו"ע בת"ל, $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן A לכסינה. מכיוון ש

$$Av_1=\lambda_1v_1, Av_2=\lambda_2v_2, Av_3=\lambda_2v_3$$

נקבל שעבור P שעמודותיה הן v_1,v_2,v_3 נקבל ש

$$P^{-1}AP=\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}}_{D}$$

(ב) נגדיר $B=-A^4-6A^3-12A^2-5A+6I$. מצאו את הפולינום המינימאלי של B.
פתרון: במידה ומתקיים כי $Av=\lambda v$ אז $f(A)v=f(\lambda)v$ לכל פולינום $f(x)$. נגדיר $f(x)=-x^4-6x^3-12x^2-5x+6$, נתשמש בסימונים מהסעיף הקודם ונקבל כי

$$f(A)v_1=f(\lambda_1)v_1, f(A)v_2=f(\lambda_2)v_2, f(A)v_3=f(\lambda_2)v_3$$

ולכן ל $B=f(A)$ יש 3 ו"ע בת"ל ולכן B לכסינה ואם נשתמש ב P מהסעיף הקודם (שעמודותיה הן v_1,v_2,v_3) נקבל כי

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} f(-1) & & \\ & f(-2) & \\ & & f(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

(אפשר לקבל את תוצאה זו גם בשימוש: אם A דומה ל D אז $f(A)$ דומה ל $f(D)$) ומכיוון שלמטריצות דומות אותו פ"א נקבל שהפ"א של B הוא $x^2(x-4)$ ומכיוון שהיא לכסינה הפ"מ שלה הוא $m_B(x)=x(x-4)$ (לפ"מ ולפ"א אותן גורמים אי פריקים + לכסינות שקול לכך שפ"מ מל"ל שונים).

(ג) האם המטריצה B מהסעיף הקודם הפיכה?
פתרון: ראינו בסעיף הקודם של B יש ע"ע 0 ולכן היא לא הפיכה.

(ד) מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה $A+P\cdot J_3(8)\cdot P^{-1}$.

פתרון: נשתמש בסימונים והחישובים של סעיף א לקבל כי

$$A = PDP^{-1}$$

ולכן

$$A + P \cdot J_3(8) \cdot P^{-1} = P \cdot (D + J_3(8)) \cdot P^{-1}$$

שהיא דומה למטריצה

$$D + J_3(8) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & \\ & 6 & 1 \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

ולכן מספיק למצאו את צורת ז'ורדן של מטריצה זאת (יחס דמיון מטריצות הוא יחס שקילות). הע"ע של $\begin{pmatrix} 7 & 1 & \\ & 6 & 1 \\ & & 6 \end{pmatrix}$ (עם כפילויות) הן $7, 6, 6$. הע"ע 7 הוא מר"ג 1 (שהרי הר"ג הוא בין 1 לר"א שבמקרה זה הוא גם 1) והע"ע 6 הוא מר"ג 1 גם כן שהרי

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & \\ & 6 & 1 \\ & & 6 \end{pmatrix} - 6I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

ומרחב האפס שלה מימד 1. לכן בצורת ז'ורדן יש בלוק אחד ל 6 והוא מופיע פעמיים על האלכסון ויש בלוק אחד ל 7 והוא מופיע פעם אחת על האלכסון. נקבל שצורת ז'ורדן המבוקשת היא

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & \\ & 6 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

2. תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה שכל רכיביה ממשיים (כלומר, לכל i, j מתקיים $A_{i,j}$ ממשי) המקיימת כי $A^2 + I = 0$.

(א) הוכיחו כי קיים k כך ש $n = 2k$ (כלומר A מסדר זוגי).
פתרון: נעביר אגף לקבל $A^2 = -I$ ואז

$$|A|^2 = \left|A^2\right| = |-I| = (-1)^n$$

ומכיוון שכל רכיבי A ממשיים נקבל ש $|A|$ ממשי ולכן $|A|^2 \geq 0$ ולכן n זוגי (אם היה אי זוגי היינו מקבלים בצד שמאל -1 שזה מוביל לסתירה).

(ב) מצאו את הפולינום האופייני של A ומצאו את הפולינום המינימאלי של A.
פתרון: לפי הנתון נקבל ש

$$f(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

מקיים כי $f(A) = 0$ ולכן הפ"מ $m_A(x)$ מחלק אותו. אם $m_A(x) = x - i$ אזי $A - iI = 0$ ואז $A = iI$ שזה סתירה לנתון שרכיבי Aממשיים. באופן דומה $m_A(x) \neq x + i$ ולכן $m_A(x) = f(x) = x^2 + 1$ ולכן A לכסינה כי הפ"מ מל"ל שונים. כיוון שלפ"א ולפ"מ אותם גורמים אי-פריקים נקבל כי הפ"א

$$p_A(x) = (x - i)^{m_1} (x - i)^{m_2}$$

כאשר m_1, m_2 טבעיים המקיימים כי $m_1 + m_2 = n$. כיוון ש A לכסינה מתקיים ש $\text{tr}(A)$ הוא סכום הע"ע. אצלנו

$$\text{tr}(A) = m_1 \cdot (i) + m_2(-i) = (m_1 - m_2)\, i$$

אבל מכיוון ש A עם רכיבים ממשיים ה $\text{tr}(A)$ גם ממשי ולכן $m_1 - m_2 = 0$ (אחרת נקבל מספר מרוכב שאינו ממשי). ולכן $m_1 = m_2$ ומכיוון ש $m_1 + m_2 = n$ נקבל ש $m_1 = m_2 = \frac{n}{2}$.

(ג) מצאו את כל צורת זורד'ן האפשריות ל A.

פתרון: בהמשך לסעיף הקודם- ראינו ש A לכסינה והר"א של i וגם של $-i$ שווה ל $\frac{n}{2}$ ולכן צורת ז'רדן האפשרית היחידה היא הצורה האלכסונית ש A דומה לה ששווה ל

$$-iI_k \oplus iI_k = \begin{pmatrix} -iI_k & \\ & iI_k \end{pmatrix}$$

כאשר $k = \frac{n}{2}$.

(ד) נגדיר $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ על ידי $T(v) = Av$. הוכיחו שלא קיים תת מרחב T- אינוואריאנטי שמימדו 1. הוכיחו שקיים תת מרחב T- אינוואריאנטי שמימדו 2.

פתרון:

- לא קיים ת"מ T- אינוואריאנטי שמימדו 1 : נניח בשלילה כי $W = \text{span}\{w\}$ הוא ת"מ T אינוואריאנטי מימד 1. אזי, לפי הגדרה $Tw \in W$ ולכן קיים סקלר ממשי λ כך ש $T(v) = \lambda v$. לפי הגדרת T מתקיים כי $Tv = Av$ ולכן λ ע"ע של A. אבל ראינו שהע"ע של A הם $-i, i$ סתירה לכך ש λ ממשי.
- קיים ת"מ T- אינוואריאנטי שמימדו 2 : נבחר $w = e_1$ (או כל $w \neq 0$ אחר) ונגדיר $W = \text{span}\{w, Aw\}$. טענה: $\dim W = 2$ הוכחה: נראה ש w, Aw בת"ל. אכן אם $\alpha_1 w + \alpha_2 Aw = 0$ נקבל ש $\alpha_2 = 0$ (אחרת נקבל $Aw = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} w$ ואז $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ע"ע ממשי ל A שזה סתירה) ואז $\alpha_1 w = 0$ ואז גם $\alpha_1 = 0$ (כי $w \neq 0$). טענה: W הוא T- אינוואריאנט. הוכחה: נראה כי $T[W] \subseteq W$. אכן

$$T[W] = T[\text{span}\{w, Aw\}] = \text{span}\{Tw, T(Aw)\} = \text{span}\left\{Aw, A^2 w\right\} = \text{span}\{Aw, -w\} = W$$

כנדרש (שימו לב כי $A^2 w = -w$ מכיוון ש $A^2 = -I$ לפי הנתון).