חישוב e^A כאשר A מטריצה מסדר 2

A מטריצה אלכסונית.

אם A מטריצה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ אז מתקיים $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

דוגמא

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

A מטריצה לכסינה.

אם A מטריצה לכסינה אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PDP^{-1}$ ו D מטריצה אלכסונית ואז מתקיים $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \left[\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

דוגמא

נניח ש $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. נמצא את הערכים העצמיים $\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftarrow \lambda = \pm 3$.

הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = 3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = -3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

סה"כ נקבל $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ ואז $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$ ואז

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

<u>מטריצה בצורת זורדן</u>

אם $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ אז $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

מכיון ש $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ נקבל ש $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מכיון שהמטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ מתחלפות ז"א $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

נקבל ש:

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

<u>דוגמא</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ אז $e^A = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$.

<u>מטריצה לא לכסינה שניתנת לז'ירדון</u>

אם A מטריצה לא לכסינה שניתנת לז'ירדון אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PJP^{-1}$ ו J מטריצת זורדן ואז מתקיים $A^n = PJ^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PJ^nP^{-1} = P\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n\right]P^{-1}$$
$$= Pe^J P^{-1}$$

<u>דוגמא</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

נמצא את הערך העצמי $0 = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| \Leftarrow 0 = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)+1 \Leftarrow \lambda = 2$.

$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ מכיוון ש $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ נקבל ש

$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\in N(A-2I)\cap C(A-2I)$. מכיוון ש $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ נקבל ש

$P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$. $J=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

$$e^A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot e^{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^2 & e^2\\ 0 & e^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$