תרגול 4 - רמזים והדרכות

מרחבים קומפקטיים

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר ש $A\subseteq X$ קומפקטי אם מתקיימת התכונה הבאה: לכל קבוצה של קבוצות פתוחות $\{O_i\}\subseteq top(X,d)$ שמקיימת, $A\subseteq\bigcup_i O_i$, יש תת קבוצה סופית, $\{O_{i_1},...,O_{i_n}\}$ כך ש $A\subseteq O\cup...\cup O_{i_n}$. במילים: מרחב קומפקטי הוא מרחב המקיים כי לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.

   (א) דוגמא: אם X מרחב סופי, אז הוא קומפקטי. (לא משנה מה המטריקה עליו)

2. משפט: ב $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיים כי: $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטי אמ״מ הוא סגור וחסום.

   (א) למשל הקבוצה $[0,1]\cup[5,15]$ קומפק'.

   (ב) תרגיל: במרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה,
   הוכחה: תנו דוגמא למרחב דיסקרטי שאינו קומפקטי. הסבירו מה הוא סגור וחסום.

3. תרגיל: כל קבוצה קומפקטית היא חסומה.
   הוכחה: בחרו נקודה בA, וכסו את A ע"י כדורים ברדיוסים הולכים וגדלים. הסבירו למה זהו כיסוי של A, והסיקו מקומפקטיות כי יש לו תת כיסוי סופי. העזרו בתת הכיסוי הסופי כדי להוכיח שA חסומה.

4. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ. נאמר ש X חסום כליל אם לכל רדיוס r יש מספר סופי של כדורים $B(x_i,r)$ עם רדיוסים כלשהם $x_i\in X$, שמהווים כיסוי ל X. כלומר, $X\subseteq\bigcup B(x_i,r)$.

5. טענה: כל מרחב קומפקטי הוא חסום כליל. (במילים אחרות: קומפקטיות גוררת חסימות כליל).
   הוכחה: כסו את המרחב ע"י כדורים ברדיוס נתון סביב כל הנקודות במרחב.

6. תרגיל: חסימות כליל היא תורשתית. כלומר, אם (X,d) הוא מרחב חסום כליל, ו$Y\subseteq X$ הוא תת קבוצה של X, אזי (Y,d) (כלומר, מסתכלים על Y כמ"מ עם המטריקה המושרית) הוא מרחב חסום כליל.
   הוכחה: יהי r רדיוס. כסו את X ע"י מספר סופי של כדורים ברדיוס $\frac{r}{2}$ (ניתן לעשות את זה כי X חסום כליל. הסבירו למה לקחת נקודה מכל חיתוך של כדור בכיסוי הנ"ל עם Yת יצור כיסוי סופי של Y עם כדורים ברדיוס r.

7. תרגיל: סגור של חסום כליל הוא חסום כליל. כלומר, אם (X,d) מ"מ ו$A\subseteq X$ היא תת קבוצה חסומה כליל, אז $cl(A)$ גם חסומה כליל.
   הוכחה: כסו את A ע"י מספר סופי של כדורים ברדיוס $\frac{r}{2}$. הסבירו למה המרכזים של הכדורים האלו יוצרים כיסוי של $cl(A)$ ברדיוס r.

מרחבים טופולוגים

1. הגדרה: תהי X קבוצה. טופולוגיה על X היא תת קבוצה של $P(X)$ שנסמן בτ, (כלומר $\tau \subseteq P(X)$) (במילים: אוסף של תתי קבוצות של X), שמקיים 3 תכונות:
   (א) $X, \emptyset \in \tau$.
   (ב) τ סגור לאיחוד כלשהו. כלומר, אם $O_i \in \tau$ לכל i, אז $\bigcup_i O_i \in \tau$.
   (ג) τ סגור לחיתוך סופי. כלומר, אם $O_1, ..., O_n \in \tau$, אז $O_1 \cap ... \cap O_n \in \tau$. (שימו לב שזה שקול לדרוש סגירות ליתוך של 2 קבוצות)

2. קבוצה $O \in \tau$ נקראת פתוחה. וקבוצה תקרא סגורה אם המשלים של פתוח. כלומר, C סגורה אם $C^c \in \tau$.

3. דוגמאות:
   (א) לכל קבוצה X אפשר לקחת $\tau = P(X)$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית. בטופולוגיה זו כל הקבוצות פתוחות. בפרט, גם כל הקבוצות סגורות.לכל קבוצה X אפשר לקחת את $\tau = \{X, \emptyset\}$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הטריוויאלית. בטופולוגיה זו הקבוצות הפתוחות והסגורות היחידות הן X ו$\emptyset$.
   (ב) לכל מרחב מטרי (X, d) ניתן להגדיר את הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה. כלומר, האוסף של כל הקבוצות שפתוחות לפי המטריקה.
   (ג) לכל קבוצה X אפשר לקחת את האוסף הבא: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O : |O^c| < \infty\}$ כלומר, הקבוצות הפתוחות הן כל הקבוצות שהמשלים שלהן סופי, והקבוצה הריקה (יתכן שהמשלים שלה אינו סופי). באופן שקול אפשר להגיד שהקבוצות הסגורות הן הקבוצות הסופיות, וX.
      i. תרגיל: הטופולוגיה הקוסופית היא אכן טופולוגיה.
      הוכחה: הראו שאוסף הקבוצות שהמשלים שלהן סופי סגור לחיתוכים סופיים, איחודים כלשהן, ומכיל את המרחב כולו. (קבוצה ריקה נמצאת שם ישירות מהגדרה)

4. [ניתן לדלג]הגדרה: יהא a שלם ו d טבעי אזי נגדיר $S_{a,d} = a + d\mathbb{Z}$. נגדיר על השלמים τ כך: קבוצה O היא פתוחה אמ"מ $O = \cup_{(a,d)} S_{a,d}$.
   (א) תרגיל: זוהי אכן טופולוגיה
   הוכחה: החלק העיקרי הוא חיתוך. יש להראות שהחיתוך של שתי סדרות דו צדדיות הוא או ריק, או סדרה דו צדדית.
   (ב) הערה: $S_{a,d}$ פתוחה
   (ג) תרגיל: $S_{a,d}$ סגורה.
   הוכחה: הראו שהמשלים פתוח.

5. הגדרה: יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. נאמר שהוא מטריזיבלי אם קיימת מטריקה d על X כך ש$\tau = top(d)$. כלומר הטופולוגיה מושרית מהמטריקה.
   (א) דוגמא: הטופולוגיה הדיסקטרית מושרית מהטריקה הדיסקרטית.

(ב) דוגמא: $X=\{a,b\}$ ו $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$. הטופולוגיה הנ"ל לא מטריזבילית, כי במטריקה כל נקודון סגור אבל אצלנו $\{a\}$ לא סגור כי $\{a\}^c=\{b\}$ לא פתוח.

(ג) דוגמא: נגדרי טופולוגיה חדשה: ניקח את הקבוצה $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$).
כלומרת לקחנו את הממשיים, והוספנו להם איבר נוסף. ונגדיר: $\tau=\{O:\ p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$.

(ד) תרגיל קשה: הטופולוגיה מהסעיף הקודם אינה מטריזבילית.
הוכחה: ניזכר כי באחד התרגולים הוכחנו שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות. מצאו קבוצה סגורה במרחב הזה, שאינה חיתוך בן מניה של פתוחות.

התכנסות

1. הגדרה: (X,τ) מ"ט . נאמר שסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x ונסמן $x_n\to x$ אם לכל סביבה U של x, כלומר קבוצה פתוחה U כך ש $x\in U$, קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $x_n\in U$.

(א) דוגמא: סדרה קבועה $x_n=a$ מתכנסת ל $x=a$, בכל טופולוגיה.

(ב) דוגמא $X=\{a,b\}$ ו $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ אזי הסדרה הקבועה $x_n=a$ לכל n, מקיימת $x_n\to a$ וגם $x_n\to b$ (כי הסביבה היחידה של b היא X..

(ג) תרגיל: $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$) ונגדיר $\tau=\{O:\ p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$.
הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף.
פתרון: נניח שמתקיים שהסדרה $x_n\to x$. נוכיח ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x. השתמשו לצורך כך בקבוצה הפתוחה הבאה: $O=(X\setminus\{x_n\})\cup\{x\}$.

רציפות

1. הגדרה: יהיו $(X,\tau),(Y,\tau')$ מ"ט ו $f:X\to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x\in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U\subseteq f^{-1}(V)$.

(א) פונקציה $f:X\to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x\in X$. זה שקול לכך ש: תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה . כלומר, לכל $O\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O)\subseteq X$ פתוחה. (כמובן בטופולוגיות המתאימות).

(ב) דוגמא: כל פונקציה $f:(X,\mathrm{disc})\to(Y,\tau')$ רציפה. כי בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה פתוחה.

(ג) כל פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\{\emptyset,Y\})$ רציפה כי בטופולוגיה הטריוויאלית הקבוצות הפתוחות היחידות הן $\emptyset$ וY, ו- $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset,f^{-1}(Y)=X$, ואילן קבוצות שפתוחות בכל טופולוגיה.

(ד) למשל $id:(X,\tau)\to(X,\tau)$ רציפה.

(ה) כל פונקציה f רציפה בין מרחבים מטריים, רציפה גם בין הטופולוגיות שמושרות מהם.

2. תרגיל: תהא $\tau=\{\mathbb{R},\emptyset,\{2\}\}$ טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f(x)=2x$, מצאו באלו נקודות f רציפה .
פתרון: הראו שf אינה רציפה רק ב$x=1$.

(א) תרגיל: מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של פונקציות רציפות $f,g:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R}\tau)$ אינה פונקציה רציפה בהכרח.
פתרון: העזרו בתרגיל הקודם.

3. תרגיל: יהיו $(Y,\tau')\,,(X,\tau)$ מ"ט ו $f\,:\,X\,\to\,Y$ רציפה. אזי f שומרת על התכנסות.
כלומר לכל סדרה: $x_n \to x$ מתקיים: $f(x_n) \to f(x)$
הוכחה: ישירות מהגדרה.

(א) תרגיל: ההפך לא נכון. תהא $f: X \to Y$ פונקציה ששומרת על התכנסות. אזי ייתכן ש f לא רציפה.
פתרון: נסתכל על $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עם $\tau = \{O:\, p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$ הסבירו למה $Id: (X,\tau) \to (X, \mathrm{disc})$ אינה רציפה, אך כן שומרת על התכנסות.