

פתרון שאלה 5

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 5x - 15y - 8 = 0$$

המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12} = a_{21} = 12$.
מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.
התבנית נכתבת כך:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (5 \quad -15) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 8 = 0 \quad (*)$$

נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = 144 - 9\lambda - 16\lambda + \lambda^2 - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$$

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.
עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y = -3$ ונקבל מיד $x = 4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} : \text{ננרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2]{-\frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y = 4$ ונקבל מיד $x = 3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} : \text{ננרמל: } \|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי ©

המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \\ -3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^t \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') P^t$$

נציב במשוואה (*) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \\ 14 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (5 \ -15) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (5 \ -15) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \\ -3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$D = P^t A P$
1 4 44 2 4 4^P 43
(13 -9)

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

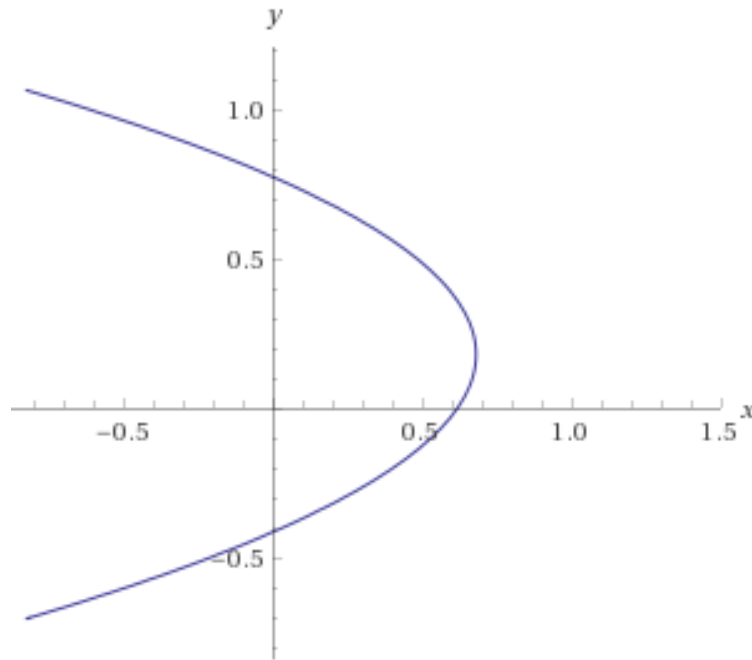
זו פרבולה שוכבת.

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \left(5y' - \frac{9}{10} \right)^2 - 2 \cdot 5y' \cdot \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 \right\} + 13x' - 8 - \left(\frac{9}{10} \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(5y' - \frac{9}{10} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow \left(5 \left(y' - \frac{9}{50} \right) \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow 25 \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \quad (:25) \Rightarrow$$

$$\left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + \frac{13}{25} x' - \frac{881}{2500} = 0 \Rightarrow \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 = \frac{881}{2500} - \frac{13}{25} x'$$

איור לפי הצירים x' ו- y' :



מכוון ש- $|P| = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ מדובר בפרבולה מסובבת.

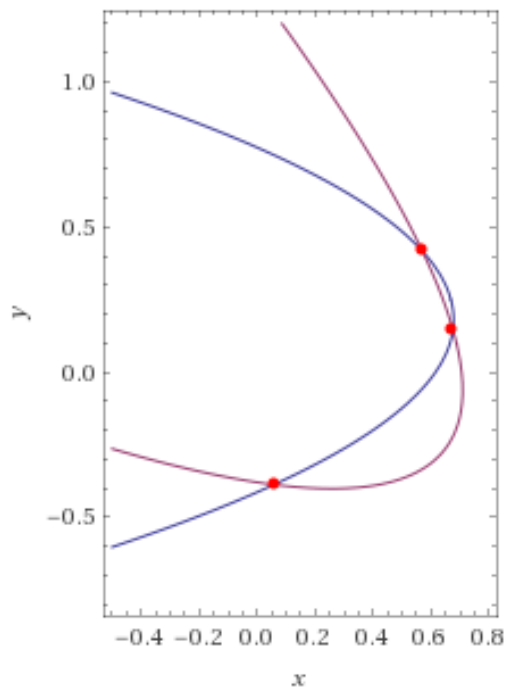
מטריצת סיבוב כללית היא $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

המטריצה $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ ולכן זווית הסיבוב היא

עם כיוון השעון כי הזווית במינוס. $\theta = -\arccos \frac{4}{5} = -36.87^\circ$

האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו- y' ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :

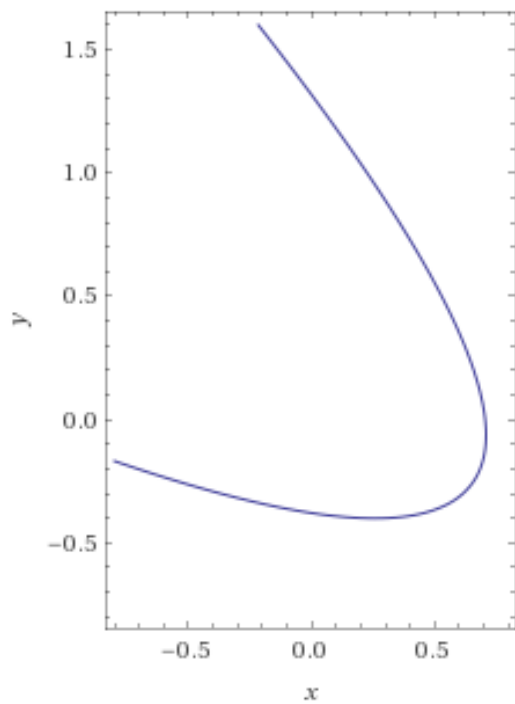
כל הזכויות שמורות
 זהבית צבי ©



— $(y - \frac{9}{50})^2 = \frac{881}{2500} - \frac{13x}{25}$

— $9x^2 + 24xy + 5x + 16y^2 - 15y - 8 = 0$

הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



— $9x^2 + 24xy + 5x + 16y^2 - 15y - 8 = 0$