



חשבון אינפי 1 - בוחן

חסמים, סדרות וטורים חיוביים

26 בדצמבר 2016

מתרגלים: עדי בן-צבי, תמר בר-און וניר שורץ.

הנחיות כלליות

- לרשותך 90 דקות ללא הארכת זמן. לא תנתן כל הארכה מכל סוג שהוא ללא אישור בכתב ממדור בחינות.
 - יש לכתוב בעט כחול/שחור בלבד.
 - אין להשתמש בחומרי עזר מלבד מחשבון כיס פשוט (דגמים שמספרם קטן ממש מ-100). מפרי ההוראה יועמדו לדין משמעת.
 - בבוחן ישנן 3 שאלות שאינן מסודרות בהכרח לפי רמת קושי. פתרו בסדר הנוח לכם.
 - הניקוד המקסימלי בבחינה זו הוא 108 נקודות. כל ניקוד מעל מאה נקודות יחשב כ-100 בחישוב הציון הסופי. הניקוד לכל שאלה זהה.
 - יש לכתוב באופן מסודר ולנמק באופן מלא את תשובותיכם.
- ניתן לצטט ללא הוכחה משפטים מההרצאה בלבד.
- אם בחרתם להביא דוגמה אשר הוצגה בהרצאה, הציגו בקצרה מדוע היא תואמת או סותרת את הטענה בה אתם דנים.

שאלות הבוחן

1. תהי סידרה חשבונית¹ עם איבר ראשון a_1 והפרש d .

(א) הראו את קיום הגבול של מנת ממוצעה הגאומטרי בממוצעה החשבונית² (32 נק'),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

(ב) מצאו גבול זה עבור $d > 0$. (4 נק')

2. קבעו עבור הטורים הבאים האם הם מתכנסים או מתבדרים (12 נק' כ"א):

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{n}}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt[5]{n} (26^n + 12^n + 16^n)}, \quad \beta \in \mathbb{R}^+.$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

3. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה אי שלילית. הוכיחו או הפריכו (18 נק' כ"א):

(א) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

(ב) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

¹תזכורת: $a_n = a_1 + d(n-1)$.
²הצעה: חלקו למקרים בהתאם לסימן של d .