פונקציות

24 בנובמבר 2015

עד היום דיברנו על סדרות ואמרנו שסדרה היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ותיארנו את הסדרה על יש מספרים, מהיום נדבר על פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ואותן נתאר במישור דו מימדי.

גרף של פונרציה הוא קבוצת הנקודות במישור $\{(x,y)\mid f(x)=y\}$.

הגדרה 0.1 (גבול של פונקציה לפי קושי)

תהי f פונקציה ממשית ו־$x_0\in\mathbb{R}$. מספר ממשי L נקרא הגבול של f ב־x_0 $\Leftrightarrow$ לכל סביבה U של L יש סביבה מנוקבת V של x_0 (כלומר סביבה של הנקודה שלא כוללת את הנקודה עצמה) כך ולכל $x\in V$ מתקיים $f(x)\in U$ ונסמן $lim_{x\to x_0}f(x)=L$. או במונחים מתמטיים:

$$lim_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\left(0<\mid x-x_0\mid<\delta\Rightarrow\mid f(x)-L\mid<\varepsilon\right)$$

דוגמה: נוכיח לפי ההגדרה של קושי שהגבול של $f(x)=2x$ הוא 2 כאשר $x\to 1$ אפשר לנחש שהגבול הוא 2 למשל על ידי כך שנציב ערכים קרובים ל1 ב־f.

יהי $\varepsilon>0$ ונקבל סביבה של L $U=(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ כעט נרצה למצוא סביבה מנוקבת V של 1 כך שלכל $x\in V$ $f(x)\in U$, וזה אומר שנרצה למצוא סביבה $(1-\delta,1+\delta)$ או במילים אחרות למצוא δ המתאים, נרצה שיתקיים:

$$0<\mid x-1\mid<\delta\Rightarrow\mid f(x)-2\mid<\varepsilon$$

נשים לב ש־$\mid f(x)-2\mid=\mid 2x-2\mid=2\mid x-1\mid<2\delta$ ולכן אם נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ נקבל את הדרוש.

הגדרה: (גבול לפי היינה)

1) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנק' $x=a$ פרט אולי לנקודה a עצמה. מספר ממשי L ייקרא גבול של $f(x)$ כאשר $x\to a$ אם מכל סדרה $\{x_n\}$ כך ש־$a\neq x_n\to a$ הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת לגבול L.

2) $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי המישור הימני (α,∞) מספר ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף לאנסוף אם לכל סדרה x_n השואפת לאיסוף הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל־L.

דוגמה: חשב את $lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x-2}$.

פתרון: תהי $\{x_n\}$ סדרה כלשהיא שמתכנסת ל־1 ולכל n, $x_n\neq 1$ אזי :

$$lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=lim\frac{x_n^2+x_n}{x_n-2}=\frac{limx_n+limx_n^2}{limx_n-2}=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

זה נכון לפי אריתמטיקה של סדרות.

דוגמה: הראה ש־ $lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

פתרון: ראינו שלכל $a_n\to\infty$ מתקיים $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ ולכן לפי הגדרת הגבול לפי קושי נקבל שהכבול שלנו הוא e.

דוגמה: מצא את הגבול $lim_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}$

פתרון: עבור סדרה $x_n\to\infty$ נקבל ש־ $\frac{1}{x_n}\to0$ ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{sin(x_n)}{x_n}=0$ כי $sin\left(x_n\right)$ היא סדרה חסומה ו־ $\frac{1}{x_n}\to0$ ולכן המכפלה שואפת ל־0.

שיטות להוכחת אי קיום הגבול

א) אם קיימית שתי סדרות שונות $\{x_n\}$ ו־$\{y_n\}$ המתכנסות לגבול a כך ש־$\{f\left(x_n\right)\}$, $\{f\left(y_n\right)\}$ מתכנסות לגבולות שונים אזי לא קיים גבול של $f\left(x\right)$ בנק' a.

ב) אם קיימת סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת לגבול a ואם הסדרה $\{f\left(x_n\right)\}$ אינה מתכנסת כלל אזי שוב לא קיים הגבול של $f\left(x\right)$ בנק' a.

דוגמה: נראה שלא קיים גבול $lim_{x\to\infty}xsin\left(x\right)$

פתרון: מבחר סדרה $x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ אזי $lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\infty$

.

דוגמה: הוכח כי $lim_{x\to0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים.

פתרון: נבחר שתי סדרות $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ וגם $\{y_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ מתקיים $f\left(x_n\right)=\frac{1}{n^2}+n\to\infty$ ואילו $f\left(y_n\right)=\frac{1}{n^4}+\left(-1\right)^n n^2$ אינו קיים ולכן אין גבול ב־$x=0$.

דוגמה: הוכח שלא קיים $lim_{x\to0}cos\left(\sqrt{ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)$

הוכחה: יש למצוא שתי סדרות $x_n,y_n\to0$, $0\neq$, ידוע ש־$cos\left(2\pi n\right)=1$ ו־ $cos\left(\pi+2\pi n\right)=-1$ לכן אנחנו רוצים למצוא שתי סדקות שיקיימו:

1) $\sqrt{ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}=2\pi n$

2) $\sqrt{ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}=\pi+2\pi n$

כלומר מפתור את שתי המשוואות האלה ונקבל:

עבור משוואה ראשונה נקבל $ln\left(\frac{1}{|x|}\right)=\left(2\pi n\right)^2\Leftarrow\frac{1}{|x|}=e^{(2\pi n)^2}$ אבל הביטוי שמימין הוא חיובי ולכן ניתן להוריד את ערך מוחלט ונקבל $x_n=\frac{1}{e^{(2\pi n)^2}}\to0$ הוספנו כאן אינדקס n ל־x כי צד ימין של המשוואה תלוי ב־n. מצאנו כאן סדרה כך שאם נציב אותה בפונקציה שלנו במקום x אזי לכל n נקבל שהערך של הפונקציה שווה ל 1 .

עבור משוואה שנייה קודם כל נרשום y במקום x כדי להבדיל בין שתי סדרות ונקבל:

$$\sqrt{ln\left(\frac{1}{|\,y\,|}\right)}=\pi+2\pi n$$

באותו אופן לאחר שנפתור את המשוואה נקבל בסדרה שלנייה: $y_n=\frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}\to0$ ואם נציב אותה במשוואה שלנו נקבל שלכל n הפונקציה שלנו ב־y_n תהיה שווה ל 1־ .

לסיכום: מצאנו שתי סדרות שונות ששתיהן שואפות שלנקודה אפס אבל $\{f(x_n)\}$ ו-$\{f(y_n)\}$ שואפות לגבולות שונים ולכן אין גבול לפונקציה שלנו.

הגדרה 0.2 (פונקציה אלמנטרית)
פונקציה אלמנטרית היא פונקציה שמתקבלת ע"י פעולות ההרכבה, הכפלה, חיבור, חיסור וחילוק מן הפונקציה הבסיסיות שהן: פונקציות קבועות, פונקציות טריגונומטריות, פונקציות לוגריתמיות, פולינומים.

משפט 0.3 תהי f פונקציה אלמנטרית המוגדרת בנק' $x = x_0$ אזי: $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ כלומר אם נתונה פונקציה אלמנטרית והיא מוגדרת בנקודה אזי הגבול של הפונקציה בנקודה הזו היא בדיוק הערך של הפונקציה בנקודה.
לדוגמה:

$$lim_{x \to 3} f(x) = lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 36}{x^2 + 4} = f(3) = \frac{3^3 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 - 36}{13} = 0$$

הגדרה 0.4 (משפט הסנדוויץ)
אם $f(x), g(x) \to a$ ומתקיים $g \leq h \leq f \Leftarrow h(x) \to a$ כאשר $x \to x_0$.
דוגמה: חשב את הגבול $lim_{x \to 0} \frac{x}{2 + sin\left(\frac{1}{x}\right)}$
פתרון: מתקיים $3 = 2 + 1 \leq 2 + sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 - 1 = 1$ ולכן עבור $x > 0$
$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leq 1$
מתקיים $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 + sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leq x$ אבל x הוא פונקציה אלמטרית ומוגדרת באפס ולכן הגבול של x באפס הוא אפס ולכן לפי משפט הסנדדויץ נקבל שהגבול של הפונקציה שלנו הוא אפס.